Indukcja i Zasada Szufladkowa

Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i $n > m$, to istnieje szuflada z przynajmniej dwoma obiektami.

Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i $n > m \cdot r$ dla pewnego $r \in \mathbb{N}$, to istnieje szuflada z przynajmniej $r + 1$ obiektami.

Dla dowolnych dwóch skończonych zbiorów A i B istnieje bijekcja z A do B wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| = |B|$.

Przykłady

Przykład. Czekolada składa się z $m \cdot n$ kostek ułożonych tradycyjnie w prostokąt o tych wymiarach. Proces łamania czekolady polega na wybraniu jednego z dostępnych kawałków i przełamania go wzdłuż jednej z linii (pionowej lub poziomej) oddzielającej kostki. Wyznacz minimalną liczbę łamań i odpowiadającą jej strategię łamania czekolady aż do otrzymania $m \cdot n$ pojedynczych kostek.

Przykład (Paradoks koni)**.** Udowodnimy, że wszystkie konie są tej samej maści. Posłużymy się indukcją matematyczną względem liczby koni w rozważanym zbiorze. Sprawdzamy bazę: każdy zbiór złożony z jednego konia jest zbiorem koni jednej maści. Teraz załóżmy, że teza jest prawdziwa dla ustalonego n. Pokażemy, że zachodzi również dla $n+1$. Dodajmy do dowolnego n-elementowego zbioru nowego konia. Mamy zbiór $n + 1$ elementowy. Odprowadźmy teraz któregoś z konii ze zbioru ale nie tego co przed chwilą dodaliśmy. Otrzymujemy więc zbiór n-elementowy koni. Z założenia indukcyjnego wiemy, że wszystkie konie w tym zbiorze są jednej maści. Możemy teraz z powrotem przyprowadzić konia (który też jest tej samej maści bo był już wcześniej w tym zbiorze) i otrzymujemy $n + 1$-elementowy zbiór koni jednej maści.

Gdzie jest błąd?

Przykład. Dla dowolnych $n + 1$ różnych liczb wybranych spośród $1, 2, \ldots, 2n$ zawsze znajdziemy dwie względnie pierwsze ze sobą.

Przykład. Z kwadratowej szachownicy o rozmiarze $n \times n$ usuń dwa narożniki leżące po przeciwnych stronach jednej z przekątnych. Czy tę zmniejszoną planszę można pokryć (podzielić) kostkami domina o rozmiarze 2×1?

Zadania

Zadanie 1. Na płaszczyźnie poprowadzono n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę

(i) obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;
(ii) obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.

Zadanie 2. Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadany jest przez: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Udowodnij, że

(i) $F_0 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$,
(ii) $5|\ F_{5n}$,
(iii) $F_n < 2^n$.

Zadanie 3. *Turniej* n-wierzchołkowy to dowolny graf skierowany $G = (V, E)$, gdzie $|V| = n$ i w którym $(u, v) \in E$ lub $(v, u) \in E$ dla dowolnych $u, v \in V$.

Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejść" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.

Zadanie 4. Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.

Zadanie 5 (nierówność o ciągach jednomonotonicznych)**.** Dla tablicy kwadratowej $A = [(a_{i,j})]$ rozmiaru $n \times n$ definiujemy:

$$\mathrm{val}(A) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Niech $A = [(a_{i,j})]$ będzie macierzą o współczynnikach dodatnich, spełniającą dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant n$ warunek $a_{i,j_1} \leqslant a_{i,j_2}$. Wykaż, że:

$$\mathrm{val}(A) \geqslant \mathrm{val}[(a_{i,\pi_i(j)})],$$

gdzie π_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, jest dowolną permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

Zadanie 6. W każdym polu szachownicy rozmiaru $n \times n$ znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:

* osoby zarażone pozostają zarażone,
* osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiednią rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony).

Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż n osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.

Zadanie 7. Wykaż, że w grupie n osób istnieją dwie, które mają taką samą liczbę znajomych.

Zadanie 8. Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.

Zadanie 9. Udowodnij, że dla dowolnych $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $1, 2, \ldots, 2n$ zawsze znajdziemy dwie, z których jedna dzieli drugą.

Zadanie 10. Pokaż, że w dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.

Zadanie 11. Wykaż, że jeśli n jest nieparzysta i π jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$, to liczba $\prod_{i=1}^{n}(i - \pi(i))$ jest zawsze parzysta.

Zadanie 12. Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n-elemetowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.

Zadanie 13. Dla n-elementowego zbioru X rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{F}$, gdzie $|F| > n/2$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje $x \in X$ należący do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{F}$.

Zadanie 14. Dana jest kwadratowa szachownica $n \times n$. Dla jakich wartosci $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości 2×2 oraz 3×3.

Zadanie 15. Dana jest kwadratowa szachownica $2^n \times 2^n$ z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości $n \geqslant 1$ możemy pokryc tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat 2×2 bez jednego pola).

Zadanie 16. Rozważ turniej rozgrywany przez n drużyn w którym docelowo każda druzyna gra z każdą inną dokładnie raz. Wykaż, że w każdym momencie istnieją dwie drużyny z taką samą liczbą dotychczas rozegranych gier (niezależnie od grafiku rozgrywek).

Zadanie 17.

(i) Czy każde 2-kolorowanie prostej rzeczywistej spełnia własność, że dla dowolnego $r > 0$ istnieją dwa monochromatyczne punkty odległe dokładnie o r?

(ii) Czy każde 2-kolorowanie płaszczyzny spełnia własność, że dla dowolnego $r > 0$ istnieją dwa mochromatyczne punkty odległe dokładnie o r?

(iii) Czy każde 3-kolorowanie płaszczyzny spełnia własność, że dla dowolnego $r > 0$ istnieją dwa mochromatyczne punkty odległe dokładnie o r?

(iv) Pokoloruj płaszczyznę używając skończonej liczby kolorów w taki sposób, aby istniało $r > 0$ takie, że dowolne dwa punkty odległe o r miały różne kolory.

Zadanie 18. Rozważ dowolne 2-kolorowanie płaszczyzny na niebiesko i czerwono. Pokaż, że zbiór odległości między niebieskimi punktami to całe $\mathbb{R}$ lub zbiór odległości między czerwonymi punktami to całe $\mathbb{R}$.