Zliczanie i współczynniki dwumianowe

Współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$, dla $n, k \in \mathbb{N}$, to liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Prosto z definicji dostajemy, że

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
(ii) $\binom{n}{k} = 0$, dla $k > n$,
(iii) $\binom{n}{1} = n$, dla $n > 0$,
(iv) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, dla $n \geqslant k$,
(v) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, dla $n \geqslant k > 0$,
(vi) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, dla $n \geqslant k$.

Sama nazwa *współczynniki dwumianowe* bierze się z następującego rozwinięcia dwumianu: dla $x, y \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

W szczególności dla $n \geqslant 0$

(i) $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$,
(ii) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$,
(iii) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$,

Zadania

Zadanie 1. Na ile sposobów można ustawić n wież na szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.

Zadanie 2. Na ile sposobów można ustawić k wież na szachownicy $n \times m$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.

Zadanie 3. Znaleźć definicje rekurencyjne następujących ciągów:

(i) $a(n)$ – liczba słów długości n nad alfabetem $\{0, 1\}$, które nie zawierają dwóch jedynek obok siebie;
(ii) $b(n)$ – liczba różnych pokryć prostokąta o wymiarze $2 \times n$ dominami wymiaru 2×1.

Zadanie 4. Ciąg $x_1, x_2, \ldots$ liczb całkowitych dodatnich jest określony rekurencyjnie w następujący sposób: liczba x_{n+1} powstaje z liczby x_n poprzez dodanie do niej wartości liczbowej pewnej niezerowej cyfry zapisu dziesiętnego liczby x_n. Czy tak określony ciąg może składać się jedynie z liczb nieparzystych?

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli $|X| = n$, $|Y| = m$, to liczba surjekcji s_{nm} ze zbioru X na zbiór Y wynosi

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n.$$

Zadanie 6. Wykaż, że liczba drzew etykietowanych na zbiorze $\{1, \ldots, n\}$ wynosi n^{n-2}.

Dwa drzewa etykietowane T_1 oraz T_2 są różne jeżeli istnieją etykiety $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że ($\{i, j\} \in T_1$ oraz $\{i, j\} \notin T_2$) lub ($\{i, j\} \in T_2$ oraz $\{i, j\} \notin T_1$).

Zadanie 7. Wyobraźmy sobie, że znajdujemy się na skrzyżowaniu Pierwszej Ulicy z Pierwszą Aleją w mieście zbudowanym na planie prostopadle przecinających się ulic. Kolejne przecznice na zachód mają numery kolejnych Aleji, a kolejne przecznice na północ mają numery kolejnych Ulic. Przyjmijmy, że chcemy przejść do skrzyżowania Szóstej Ulicy z Czwartą Aleją. Ile mamy najkrótszych tras do wyboru?

Zadanie 8. Ile rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7,$$

(i) gdzie x_i są liczbami naturalnymi?
(ii) gdzie x_i są dodatnimi liczbami naturalnymi?

Zadanie 9. Rozważmy czekoladę złożoną z $m \times n$ kostek? Na ile sposobów można wykroić prostokąt złożony z $k \times k$ sąsiadujących ze sobą kostek czekolady?

Zadanie 10 (Reguła sumowania po górnym indeksie)**.** Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Zadanie 11 (Reguła sumowania równoległego)**.** Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Zadanie 12. Ile jest funkcji $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ monotonicznych (czyli takich, że $f(i) \leqslant f(j)$ dla $i < j$)?

Zadanie 13. Ile jest $k-$elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb.

Zadanie 14. Posługując się interpretacją geometryczną udowodnij, że

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}.$$

Zadanie 15. Udowodnij poniższe tożsamości na dwa sposoby: posługując się interpretacją kombinatoryczną albo rozwinięciem dwumianu $(1+x)^n$:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \tag{a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n+n^2)2^{n-2}, \tag{b}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}, \tag{c}$$

Zadanie 16. Oblicz

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m}$,

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{k}{m}$.

Zadanie 17. Wykazać, że dla dowolnej liczby pierwszej p, dowolnego $a \geqslant 1$ oraz $0 < k < p^a$ zachodzi

$$\binom{p^a}{k} \equiv 0 \mod p.$$