

Posety i Zbiory

Twierdzenie (dualne do Dilwortha). Dowolny skończony poset o wysokości h można podzielić na h antyłańcuchów.

Twierdzenie (Dilworth; 1950). Dowolny skończony poset o szerokości w można podzielić na w łańcuchów.

Lemat (Erdős, Szekeres; 1935). Dowolny ciąg $m \cdot n + 1$ liczb rzeczywistych zawiera podciąg niemalejący długości $m + 1$ lub podciąg nierosnący długości $n + 1$.

Twierdzenie (Sperner; 1928). Niech \mathcal{F} będzie rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$, mamy $A \not\subseteq B$. Wtedy

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Twierdzenie (Erdős–Ko–Rado; 1961). Niech $n \geq 2k$ i niech \mathcal{F} będzie rodziną k -elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$. Wtedy

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

ZADANIA

Będziemy również rozwiązywać zadania nierozwiązane zeszłym razem z Zestawu 3.

Zadanie 1. Wykaż, że spośród dowolnych trzech permutacji zbioru $[n]$ istnieją dwie zawierające wspólny podciąg długości co najmniej $n^{1/3}$.

Zadanie 2. Niech I będzie rodziną n przedziałów na osi rzeczywistej. Wykaż, że I zawiera co najmniej \sqrt{n} przedziałów parami rozłącznych lub I zawiera co najmniej \sqrt{n} przedziałów takich, że wszystkie posiadają wspólny punkt.

Zadanie 3. Zbiór J przedziałów na \mathbb{R} jest *zagnieżdżony*, jeśli dla dowolnych $A, B \in J$ mamy $A \subseteq B$ lub $A \supseteq B$.

Niech $n, k \geq 1$. Niech I będzie rodziną n przedziałów na \mathbb{R} . Wykaż, że

- (i) istnieje $J \subseteq I$ taki, że $|J| = k$ i J zagnieżdżony, lub
- (ii) istnieje $J' \subseteq I$ taki, że $|J'| \geq n/k$ i dla dowolnych $A \neq B \in J'$ mamy $A \not\subseteq B$.

Zadanie 4. Udowodnij, że rodziny $\left(\binom{[n]}{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$ i $\left(\binom{[n]}{\lceil n/2 \rceil}\right)$ to jedyne antyłańcuchy w $\mathcal{B}_n = (\mathcal{P}(n), \subseteq)$ świadczące szerokość \mathcal{B}_n .

Zadanie 5. Niech a_1, \dots, a_n będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $|a_i| \geq 1$ dla każdego $i \in [n]$. Niech

$$P(a_1, \dots, a_n) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot a_i < 1\}.$$

Wykaż, że $|P(a_1, \dots, a_n)| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Zadanie 6. Niech \mathcal{F} będzie rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że nie istnieją $A, B, C \in \mathcal{F}$ dla których $A \subsetneq B \subsetneq C$. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| \leq 2 \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Rodzina podzbiorów \mathcal{F} jest *przecinająca się*, jeśli dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$.

Zadanie 7. Niech \mathcal{F} będzie maksymalną przecinającą się rodziną podzbiorów $[n]$. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| = 2^{n-1}.$$

Zadanie 8. Niech \mathcal{F} będzie maksymalną rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cup B \neq [n]$. Wyznacz $|\mathcal{F}|$.

Zadanie 9. Rodzina podzbiorów \mathcal{F} zbioru $[n]$ jest *rozdzielająca* jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F \in \mathcal{F}$ taki, że $|F \cap \{x, y\}| = 1$. Rodzina podzbiorów \mathcal{F} zbioru $[n]$ jest *silnie rozdzielająca* jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ takie, że $x \in F_1 - F_2$ i $y \in F_2 - F_1$.

- (i) Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny rozdzielającej $[n]$?
- (ii) Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny silnie rozdzielającej $[n]$?

Zadanie 10. Niech $1 \leq s < r < n$ i niech \mathcal{F} będzie rodziną podzbiorów r -elementowych zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$ mamy $|A \cap B| \leq s$. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{\binom{n}{s+1}}{\binom{r}{s+1}}.$$

Zadanie 11. Niech $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ będzie rodziną zbiorów r -elementowych i $\mathbf{G} = \{B_1, \dots, B_m\}$ będzie rodziną zbiorów s -elementowych oraz niech

- (i) $A_i \cap B_i = \emptyset$ dla każdego $i \in [m]$,
- (ii) $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ dla każdych $i \neq j, i, j \in [m]$.

Wykaż, że

$$m \leq \binom{r+s}{s}.$$

Wskazówka. Spróbuj wykazać, że

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1.$$