Twierdzenia Ramseyowe I

Twierdzenie (Ramsey; 1930)**.** Dla dowolnych $n \geqslant p \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : \binom{[N]}{p} \to [k]$ istnieje $X \subseteq [N]$ oraz $\alpha \in [k]$ takie, że

$$|X| = n \quad \text{oraz} \quad \binom{X}{p} \subseteq c^{-1}(\alpha).$$

Twierdzenie (Erdős-Szekeres; 1935)**.** Dla każdego n istnieje N takie, że dla dowolnych N punktów na płaszczyźnie pewne n spośród nich tworzy wielokąt wypukły.

Zadania

Drzewo binarne to drzewo w którym stopień każdego wierzchołka jest $\leqslant 3$. *Ukorzenione drzewo binarne* to drzewo binarne, w którym wyróżniono jeden z wierzchołków, zwany *korzeniem* stopnia co najwyżej 2. Dodatkowo dla każdego wierzchołka rozróżniamy jego sąsiadów tak, że jedyny sąsiad na ścieżce do korzenia to *rodzic* (korzeń nie ma rodzica); pozostali sąsiedzi są opcjonalni i są to: *lewe dziecko* i *prawe dziecko*. Zauważ, że wierzchołki ukorzenionego drzewa binarnego są w oczywistej bijekcji ze zbiorem ciągów binarnych domkniętym na relację prefiksu (korzeń wtedy odpowiada ciągowi pustemu).

Kompletne drzewo binarne rzędu n, które oznaczamy T_n, to drzewo odpowiadające wszystkim ciągom binarnym długości co najwyżej n. Zatem T_0 to pojedynczy wierzchołek, a T_1 ma trzy wierzchołki.

Mówimy, że $x \leqslant y$ w drzewie binarnym T jeśli x jest na ścieżce z y do korzenia T.

Dla drzew binarnych R, S, T mówimy, że R jest *kopią* S w T jeśli $V(R) \subseteq V(T)$ oraz istnieje funkcja $f : S \to R$ taka, że

- (i) f jest izomorfizmem, a zatem jest bijekcją i $x \leqslant y$ w S wtedy i tylko wtedy gdy $f(x) \leqslant f(y)$ w T;
- (ii) dla dowolnych $x, y \in S$ takich, że $x < y$ w S zachodzi: y jest w lewym poddrzewie x w S wtedy i tylko wtedy, gdy $f(y)$ jest w lewym poddrzewie $f(x)$ w T.

Zadanie 1. Wykaż, że $2^s < R^{(2)}(3, 3, \ldots, 3; s) \leqslant 3s!$, gdzie $R^{(2)}(3, 3, \ldots, 3; s)$ to najmniejsza liczba N taka, że dla każdego kolorowania $c : \binom{[N]}{2} \to [s]$ istnieje kolor $\alpha \in [s]$ oraz zbiór $X \subset [N]$ taki, że $|X| = 3$ oraz $\binom{X}{2} \subset c^{-1}(\alpha)$.

Zadanie 2. Wykaż, że dla dowolnych $n, k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego k-kolorowania wierzchołków T_N istnieje monochromatyczna kopia drzewa T_n w T_N.

Zadanie 3. Wykaż, że dla dowolnych $n, k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego k-kolorowania kopii T_1 w T_N istnieje kopia R drzewa T_n w T_N taka, że każda kopia T_1 w R ma ten sam kolor.

Zadanie 4. Wykaż, że dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje N takie, że każde N punktów na płaszczyźnie zawiera n punktów w pozycji ogólnej lub n punktów leżących na jednej prostej.

Zadanie 5. Wykaż, że dowolny zbiór $N \geqslant R^{(3)}(n,n)$ punktów na płaszczyźnie (pozycja ogólna) zawiera n punktów w pozycji wypukłej. (Będzie to jeszcze jeden dowód Twierdzenia Erdősa-Szekeresa).

Zadanie 6. Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : 2^{[N]} \to [k]$ (kolorujemy zbiór podzbiorów zbioru $[N]$) istnieją dwa niepuste, rozłączne zbiory $X, Y \subset [N]$ takie, że

$$\text{zbiory } X,\ Y \text{ oraz } X \cup Y \text{ mają ten sam kolor.}$$

Zadanie 7. Udowodnij Twierdzenie Schura: dla każdego $k \geqslant 1$ istnieje N o tej własności, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x, y, z \in [N]$ takie, że $c(x) = c(y) = c(z)$ oraz $x + y = z$.

Zadanie 8. Niech $S(k)$ będzie najmniejszą liczbą N spełniającą Twierdzenie Schura dla ustalonego k. Wykaż, że

$$S(k) = \Omega(3^k).$$

Zadanie 9. Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$, istnieje N takie, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > N$ równanie

$$x^k + y^k = z^k \mod p$$

ma nietrywialne rozwiązanie, czyli takie, że p nie dzieli $x \cdot y \cdot z$. (Czyli Wielkie Twierdzenie Fermata nie byłoby prawdziwe gdyby równość obłożyć kongruencją.)

Zadanie 10. Wykaż, że każde 2-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, 325\}$ zawiera monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości 3.

Zadanie 11. Wykaż, że każde 2-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, 256\}$ zawiera monochromatyczny ciąg geometryczny długości 3.

Zadanie 12. Wykaż, że $\{1, \ldots, \frac{1}{2}(3^n + 1)\}$ zawiera podzbiór mocy 2^n bez ciągu arytmetycznego długości 3.

Zadanie 13. Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$, istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x, y, z \in [N]$ takie, że

$$c(x) = c(y) = c(z) \quad \text{oraz} \quad x \neq y \quad \text{oraz} \quad x + y = z.$$

Zadanie 14. Wykaż, że dla każdego kolorowania płaszczyzny k kolorami oraz dla każdej liczby $N \geqslant 1$ istnieje N lini poziomych oraz N linii pionowych o tej własności, że zbiór punktów leżących na przecięciu tych linii jest monochromatyczny.