Twierdzenia Ramseyowe 2

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych $n, k \geqslant 1$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla dowolnego k-kolorowania liczb ze zbioru $\{1, \ldots, N\}$ istnieją liczby a oraz r takie, że

$$a,\ a+r,\ a+2r, \ldots,\ a+(m-1)r \text{ oraz } r$$

mają ten sam kolor.

Zadanie 2. Dwuosobowa gra (n, k)-Van der Waerdena dla $n, k \geqslant 1$ to: Gra pomiędzy graczem A i graczem B, którzy naprzemiennie wybierają liczby ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Gracz A rozpoczyna. Gracze nie mogą wziąć wcześniej wziętej liczby. Wygrywa pierwsza osoba, która wśród swoich liczb posiada ciąg arytmetyczny długości k.

Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ istnieje N takie, że gracz A ma strategię wygrywającą w (N, k)-grze.

Zadanie 3. Dla $t \geqslant 3$ niech $L(t)$ będzie równaniem $x_1 + \cdots + x_{t-1} = x_t$. Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ i dla dowolnego $t \geqslant 3$ istnieje N takie, że dla dowolnego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieje monochromatyczne rozwiązanie $L(t)$.

Zadanie 4. Na wykładzie udowodniliśmy, że dla dowolnego $k, \ell \geqslant 2$ zbiór punktów na płaszczyźnie bez k-kubka i ℓ-czapeczki ma rozmiar co najwyżej

$$\binom{k+\ell-4}{k-2}.$$

Wykaż, że to ograniczenie jest optymalne.

Zadanie 5. Niech $\mathrm{ES}(n)$ będzie najmniejszą wartością N dla danego n z Twierdzenia Erdősa-Szekeresa. Wykaż, że

$$\mathrm{ES}(n) \leqslant f(n-1, n) + 1 = \binom{2n-5}{n-2} + 2.$$

Podpowiedź: Rozważ zbiór X wielkości $f(k, \ell)$ i jego najwyższy punkt. Wykaż, że ten punkt tworzy zbiór wypukły wielkości $k+1$ z k-kubkiem w X lub istnieje ℓ-czapeczka w X.

Zadanie 6. Niech X będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie. Podzbiór $Y \subseteq X$ jest *k-dziurą* jeśli $|Y| = k$, Y jest wypukły i $\mathrm{convex}(Y) \cap X = Y$. Wykaż, że wystarczająco duże zbiory punktów na płaszczyźnie mają 5-dziurę.