

Funkcje tworzące 1

Rozważ ciągi (y_0, y_1, \dots) spełniające równanie

$$y_{n+k} = a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + \dots + a_1y_{n+1} + a_0y_n,$$

dla dowolnego $n \geq 0$ i pewnego $k \geq 0$. Równanie takiej postaci nazywamy *homogeniczną liniową rekurencją*.

Wielomian charakterystyczny powyższego równania to

$$p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - a_1x - a_0.$$

Propozycja. Niech $p(x)$ będzie wielomianem charakterystycznym powyższego równania.

- (i) Jeśli $p(x)$ ma k różnych pierwiastków $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ to: Dla każdego ciągu $y = (y_0, y_1, \dots)$ spełniającego równanie istnieją stałe C_1, C_2, \dots, C_k takie, że dla każdego $n \geq 0$

$$y_n = C_1\lambda_1^n + \dots + C_k\lambda_k^n.$$

- (ii) Jeśli $p(x)$ ma q różnych pierwiastków $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ o krotnościach k_1, \dots, k_q , gdzie $k_1 + \dots + k_q = k$ to: Dla każdego ciągu $y = (y_0, y_1, \dots)$ spełniającego równanie istnieją stałe $C_{i,j}$ gdzie $i = 1, \dots, q, j = 0, \dots, k_i - 1$ takie, że dla każdego $n \geq 0$

$$y_n = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{k_i-1} C_{i,j} \binom{n}{j} \lambda_i^n.$$

ZADANIA

Zadanie 1. Wykorzystaj funkcje tworzące aby policzyć na ile sposobów można wyciągnąć 70 kul z urny zawierającej 30 kul czerwonych, 40 kul niebieskich i 50 kul białych. Kule tego samego koloru są nierozróżnialne. Kolejność wyciągania jest nieistotna.

Zadanie 2. Jaki jest współczynnik

- (i) przy x^5 w $(1 - 2x)^{-2}$;
(ii) przy x^4 w $\sqrt[3]{1+x}$;
(iii) przy x^3 w $(2+x)^{3/2}/(1-x)$?

Zadanie 3. Wyznacz funkcje tworzące następujących ciągów. (Znajdź zwartą postać tych funkcji, to jest bez nieskończonych sum.)

- (i) $0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots$,
(ii) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$,
(iii) $1, 2, 1, 4, 1, 8, \dots$,
(iv) $\left\{ \binom{c}{0}, \binom{c}{1}, \binom{c}{2}, \dots \right\}$,
(v) $\left\{ 1, \binom{c}{1}, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \dots \right\}$,
(vi) $\{1, c, c^2, c^3, \dots\}$,
(vii) $\left\{ 1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \dots \right\}$,

- (viii) $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$,
(ix) $\{1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots\}$.

Zadanie 4 (+). Niech $G(z)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $\{g_n\}_{n \geq 0}$. Jaki ciąg generuje funkcja $G(z) + G(-z)$, a jaki funkcja $G(z) - G(-z)$?

Zadanie 5. Niech a_n będzie liczbą trójek (i, j, k) liczb całkowitych takich, że $i \geq 0, j \geq 1, k \geq 1$ oraz $i + 3j + 3k = n$. Znajdź funkcję tworzącą ciągu (a_0, a_1, \dots) i wyznacz wzór na a_n .

Zadanie 6. Ustal liczbę naturalną $r \geq 2$ i niech a_n będzie liczbą r -tupli (i_1, \dots, i_r) nieujemnych liczb całkowitych takich, że $i_1 + \dots + i_r = n$.

- (i) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu (a_0, a_1, \dots) .
(ii) Przy pomocy tej funkcji wyznacz wzór na a_n

Zadanie 7. Niech $a(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu (a_0, a_1, \dots) . Wytlumacz dlaczego $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ jest tworzącą $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$. Korzystając z tej obserwacji wyznacz wzór zwarty na:

- (i) $\sum_{k=1}^n k^2$;
(ii) $\sum_{k=1}^n k^3$;
(iii) $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k}$, dla dowolnych naturalnych m, n .

Zadanie 8. Wyznacz wzór zwarty na a_n , jeśli

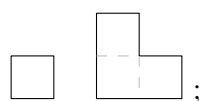
- (i) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$,
(ii) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$,
(iii) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$.

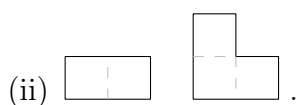
Zadanie 9. Rozwiąż równania rekurencyjne:

- (i) $a_0 = 4, a_1 = 4, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$,
(ii) $a_0 = 2, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
(iii) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$,
(iv) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
(v) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$,
(vi) $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 11, a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n$,
(vii) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$.
(viii) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n$.
(ix) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 4^n$.

Zadanie 10. Korzystając z funkcji tworzących wyznacz liczbę ciągów długości n nad alfabetem $\{a, b, c, d\}$ takich, że a nigdy nie jest przy b .

Zadanie 11 (Mini-Tetris). Wykorzystaj funkcje tworzące aby określić asymptotykę (względem n) liczby sposobów na jakie możemy wypełnić prostokąt $n \times 2$ kawałkami typu:

- (i)  ;



Zadanie 12. Wykaż, że

$$\frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right],$$

jest liczbą całkowitą dla każdego $n \geq 1$.

Zadanie 13. Wykaż, że liczba

$$(6 + \sqrt{37})^{999}$$

ma co najmniej 999 zer na początku zapisu dziesiętnego części ułamkowej.

Zadanie 14. Wykaż, że dla dowolnego $n \geq 1$ liczba

$$(\sqrt{2} - 1)^n$$

może być zapisana jako różnica pierwiastków (drugiego stopnia) dwu kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 15. Przedstaw w postaci zwartej splot liczb Fibonacciego, czyli

$$\sum_{k=0}^n F_k F_{n-k}.$$

Zadanie 16. Wyznacz zwartą postać funkcji tworzącej dla ciągu $(F_{2n})_{n \geq 0}$, gdzie F_i jest i -tą liczbą Fibonacciego.

Zadanie 17. Wyraź sumy

$$S_n = \binom{2n}{0} + 2 \binom{2n-1}{1} + \dots + 2^n \binom{n}{n}$$

jako współczynniki przy x^{2n} pewnego szeregu i znajdź wzór zwarty na S_n .