Funkcje tworzące 2

Podział liczby n na k składników to przedstawienie n w postaci sumy

$$a_0 + \ldots + a_{k-1} = n,$$

gdzie wszystkie $a_i \in \mathbb{N}$ oraz $1 \leqslant a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_{k-1}$.
Liczbę podziałów n na k składników oznaczamy $P(n, k)$. Dla $n, k \in \mathbb{N}^+$ zachodzi

(i) $P(n, 1) = 1$,
(ii) $P(n, 2) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,
(iii) $P(n, n) = 1$,
(iv) $P(n, k) = 0$, dla $n < k$
(v) $\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \leqslant P(n, k) \leqslant \binom{n-1}{k-1}$.

Diagram Ferrersa dla podziału $n = a_0 + \ldots + a_{k-1}$ to tabelka składająca się z k wierszy, w której i-ty wiersz zawiera a_{i-1} elementów.

Zadanie 1. Udowodnij, że

(i) $P(n, k)$ jest równe liczbie podziałów liczby n o największym składniku równym k;
(ii) liczba podziałów liczby n na parami różne składniki jest równa liczbie podziałów liczby n na nieparzyste składniki;
(iii) $P(n + k, k)$ jest równe liczbie podziałów n, w których żaden ze składników nie przekracza k;
(iv) liczba podziałów *samosprzężonych* (dwa podziały są *sprzężone* jeśli ich diagramy Ferrersa są symetryczne względem "przekątnej") liczby n jest równa liczbie podziałów liczby n na parami różne składniki nieparzyste.

Zadanie 2. Wachlarzem rzędu n nazywamy graf o $n + 1$ wierzchołkach: $\{0, 1, \ldots, n\}$ z $2n - 1$ krawędziami zdefiniowanymi następująco: Wierzchołek 0 jest połączony z każdym innym wierzchołkiem a wierzchołek i połaczony jest z $i+1$ dla $i = 1, \ldots, n-1$. Ile różnych drzew rozpinających posiada n-ty wachlarz? Wyznacz funkcję tworzącą dla rozważanego ciągu.

Zadanie 3. Na ile sposobów można rozmienić banknot 100 złotowy na monety 1, 2 i 5 złotowe? Podaj funkcje tworzącą dla ciągu $p(n|$ każdy składnik podziału wynosi 1,2, bądź 5).

Zadanie 4. Znajdź funkcje tworzące dla następujących ciągów:

(i) $p(n \mid$ wszystkie podziały $n)$,
(ii) $p(n \mid$ składniki podziału są parami różne),
(iii) $p(n \mid$ każdy składnik jest nieparzysty),
(iv) $p(n \mid$ każdy składnik jest parzysty),
(v) $p(n \mid$ każdy składnik jest ograniczony przez m),
(vi) $p(n \mid$ każdy składnik może występować co najwyżej m razy).

Zadanie 5. Wykorzystując metodę funkcji tworzących wykaż, że:

$$p(n \mid \text{składniki podziału są różne}) = p(n|\text{każdy składnik podziału jest nieparzysty}).$$

Zadanie 6. Wykaż, że

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}.$$

Zadanie 7. Niech $P(x)$ będzie funkcją tworzącą dla ciągu $p(n)$, gdzie $p(n)$ jest ilością wszytskich podziałów n. Wykaż, że

$$P(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2\ldots(1-x^k)^2}.$$

Zadanie 8. Niech $f(n)$ [$g(n)$] oznaczają liczbę podziałów n z parzystą [nieparzystą] liczbą składników parzystych. Niech $k(n)$ oznacza liczbę podziałów samosprzężonych n. Wykaż, że

$$f(n) - g(n) = k(n).$$

Zadanie 9. Znajdź funkcję tworzącą dla ciągu:

$$a_n = \sum_{m>0} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n,\ k_i>0} k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m.$$

Zadanie 10. Przy ustalonym $k \in \mathbb{N}$, niech $B_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n$ będzie funkcją tworzącą dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Wykaż, że

$$B_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdot\ldots\cdot(1-kx)}.$$

Korzystając z powyższego udowodnij wzór

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!} \text{ dla } n, k \geqslant 0$$

oraz

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{r \geqslant 0} \frac{r^n}{r!},$$

gdzie B_n jest $n-$tą liczbą Bella.