Grafy: drzewa, ścieżki, cykle, stopnie wierzchołków

Niech G będzie grafem. Przez $\operatorname{dist}(u, v)$ oznaczamy długość najkrótszej ścieżki pomiędzy u oraz v, $u, v \in V(G)$.
Promień grafu G, $\operatorname{rad}(G)$, to najmniejsza liczba k dla której istnieje wierzchołek $v \in V(G)$ taki, że $\operatorname{dist}(v, u) \leqslant k$ dla każdego $u \in V(G)$.
Średnica grafu G, $\operatorname{diam}(G)$, jest równa $\max\{\operatorname{dist}(u, v), u, v \in V(G)\}$.
Cykl C grafu G jest cyklem *Hamiltona* jeżeli C przechodzi dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek grafu G.
Zamknięty spacer C grafu G jest cyklem *Eulera* jeżeli C przechodzi dokładnie jeden raz przez każdą krawędź grafu G.

Zadanie 1. Wykaż równoważność następujących zdań: dla grafu T

(i) T jest drzewem;
(ii) Dowolne dwa wierzchołki T są połączone unikalną ścieżką;
(iii) T jest minimalnie spójny, tzn. T jest spójny ale $T - e$ jest niespójny dla dowolnej krawędzi $e \in T$;
(iv) T jest maksymalnie acykliczny, tzn. T nie zawiera cyklu ale $T + xy$ zawiera cykl dla dowolnych niepołączonych wierzchołków $x, y \in T$.

Zadanie 2. Niech T będzie ukorzenionym drzewem. Podział zbioru wierzchołków $V(T)$ na zbiory $P_1, \ldots, P_t$ nazywamy 'heavy-light decomposition' drzewa T, jeżeli spełnione są następujące warunki:

* P_i jest ścieżką w T zawartą w pewnej ścieżce od korzenia do liścia drzewa T,
* jeżeli pewna ścieżka od korzenia do liścia drzewa T przecina się niepusto z n ścieżkami ze zbioru $\{P_1, \ldots, P_t\}$, to $|V(T)| \geqslant 2^n - 1$.

Wykaż, że T posiada 'heavy-light' dekompozycję.

Zadanie 3. Udowodnij, że dowolne drzewo T ma przynajmniej $\Delta(T)$ liści.

Zadanie 4. Niech $\mathcal{T}$ będzie dowolnym podzbiorem poddrzew drzewa T. Pokaż, że

(i) jeśli każde dwa drzewa w $\mathcal{T}$ mają niepuste przecięcie (wierzchołkowo) to istnieje wierzchołek należący do wszystkich drzew w $\mathcal{T}$;
(ii) dla dowolnego $k \geqslant 1$ zachodzi: $\mathcal{T}$ zawiera k rozłącznych wierzchołkowo drzew albo istnieje zbiór co najwyżej $k - 1$ wierzchołków drzewa T przecinający niepusto każde drzewo w $\mathcal{T}$.

Zadanie 5. Niech $d \in \mathbb{N}$, $V = \{0, 1\}^d$ i $G_d = (V, E)$ będzie grafem, w którym krawędzie są pomiędzy ciągami różniącymi się na dokładnie jednej pozycji. Graf G_d nazywamy d-wymiarową kostką. Dla grafu G_d wyznacz:

(i) liczbę krawędzi
(ii) średnicę (maksymalną długość najkrótszej ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami)
(iii) talię (najmniejszy rozmiar cyklu)
(iv) obwód (największy rozmiar cyklu)

Zbadaj, kiedy G_d ma cykl Hamiltona, Eulera?

Zadanie 6. Pokaż, że $\mathrm{rad}(G) \leqslant \mathrm{diam}(G) \leqslant 2\,\mathrm{rad}(G)$ dla dowolnego grafu G. Wskaż grafy świadczące równości.

Zadanie 7. Wykaż, że dla każdego grafu G zachodzi: G jest spójny lub $\bar{G}$ (dopełnienie G) jest spójny.

Zadanie 8. Niech $c(G)$ będzie liczbą spójnych składowych G. Wykaż, że jeśli G jest grafem z cyklem Hamiltonowskim to dla każdego niepustego $S \subset V(G)$ mamy $c(G-S) \leqslant |S|$.

Zadanie 9. Niech G będzie grafem o $n \geqslant 3$ wierzchołkach. Pokaż, że jeżeli $\deg(v) \geqslant \frac{|V(G)|}{2}$ dla dowolnego wierzchołka $v \in V(G)$, to G posiada cykl Hamiltona.

Zadanie 10. Niech G będzie grafem o $n \geqslant 3$ wierzchołkach. Pokaż, że jeżeli $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$ dla dowolnych dwu niesąsiadujących (i różnych) wierzchołków $u, v \in V(G)$, to G posiada cykl Hamiltona.

Zadanie 11. Niech G będzie grafem o $n \geqslant 3$ wierzchołkach. Pokaż, że jeżeli $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$ dla pewnych dwu niesąsiadujących (i różnych) wierzchołków $u, v \in V(G)$, to mamy:

$$G \text{ ma cykl Hamiltona} \Leftrightarrow G + uv \text{ ma cykl Hamiltiona.}$$

Zadanie 12. Niech G będzie grafem o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i niech $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ będzie ciągiem stopni G. Wykaż, że jeśli dla każdego (całkowitego) $1 \leqslant i < n/2$ mamy $d_i \geqslant i+1$, to G ma cykl Hamiltona.

Zadanie 13. Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ i niech $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + 1$. Pokaż, że $V(G)$ można podzielić na dwie części X_1 i X_2 takie, że $\Delta(G[X_1]) \leqslant \Delta_1$ i $\Delta(G[X_2]) \leqslant \Delta_2$.