Przepływy. Spójność grafów.

Graf $G = (V, E)$ jest grafem *dwudzielnym* jeżeli zbiór wierzchołków V możemy podzielić na dwa podbiory X, Y w taki sposób, że każda krawędź z G ma jeden koniec w zbiorze X i jeden w zbiorze Y. Graf G oznaczamy wówczas przez (X, Y, E).

Zbiór $M \subset E$ jest *dopasowaniem* w grafie dwudzielnym $G = (X, Y, E)$ jeżeli żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca. Dopasowanie $M \subset E$ jest *doskonałe* jeżeli każdy wierzchołek z $X \cup Y$ jest końcem jakiejś krawędzi z M.

Graf G jest *k-spójny* jeżeli $|V(G)| > k$ oraz po usunięciu dowolnych $k-1$ wierzchołków graf G pozostaje spójny.

Graf G jest *krawędziowo k-spójny* jeżeli po usunięciu dowolnych $k-1$ krawędzi graf G pozostaje spójny.

Zbiór krawędzi grafu G nazywamy *st-przekrojem* jeżeli po usunięciu krawędzi z tego zbioru wierzchołki s oraz t znajdują się w dwóch różnych składowych spójnych. *Minimalnym st-przekrojem* w grafie ważonym (krawędzie mają wagi dodatnie) nazywamy st-przekrój o minimalnej sumie wag krawędzi tego przekroju.

Siecią przepływową nazywamy piątkę (s, t, V, E, c), gdzie:

* V jest zbiorem wierzchołków sieci,
* $s, t \in V$ są dwoma wyszczególnionymi wierzchołkami sieci, zwanymi ospowiednio *źródłem* oraz *ujściem*,
* $E \subset V \times V$ jest zbiorem skierowanych krawędzi sieci; wszytskie krawędzie mające koniec w s są skierowane w kierunku „od s”, wszystkie krawędzie mające koniec w t są skierowane „do t”,
* $c : E \to \mathbb{N}$ jest funkcją przepustowości.

Funkcję $f : E \to \mathbb{N}$ nazywamy *przepływem* w sieci (s, t, V, E, c) jeżeli zachowane są warunki:

* $f(x, y) \leqslant c(x, y)$ dla każdej krawędzi $(x, y) \in E$ (warunek przepustowości),
* dla każdego wierzchołka $v \in V$, $v \neq s$, $v \neq t$ zachodzi

$$\sum_{(x,v)\in E} f(x, v) = \sum_{(v,y)\in E} f(v, y) \text{ (warunek zachowania przepływu)}$$

Wartość funkcji przepływu $\mathrm{val}(f)$ definiujemy jako $\sum_{(s,x)\in E} f(s, x)$. *Przepływem maksymalnym* nazywamy przepływ o maksymalnej wartości.

Przekrojem w sieci przepływowej (s, t, V, E, c) nazywamy dowolną parę (S, T) spełniającą warunki $S \cup T = V$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$.

Dla ustalonego przekroju (S, T) w sieci (s, t, V, E, c) i funkcji przepływu f, przez

* $c(S, T)$ oznaczamy *przepustowość* przekroju (S, T), którą definiujemy

$$c(S, T) = \sum\{c(x, y) : \ (x, y) \in E, \ x \in S, \ y \in T\},$$

* $f(S,T)$ oznaczamy *przepływ* między S i T, który definiujemy

$$f(S,T) = \sum\{f(x,y):\ (x,y) \in E,\ x \in S,\ y \in T\} - \sum\{f(y,x):\ (y,x) \in E,\ x \in S,\ y \in T\}.$$

Ciąg $(s = v_0, v_1, \ldots, v_k)$ nazywamy *ścieżką powiększającą* od s do v_k jeżeli dla dowolnego $i = 0, \ldots, k-1$ mamy, albo $(v_i, v_{i+1}) \in E$ i $f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$ albo $(v_{i+1}, v_i) \in E$ i $f(v_{i+1}, v_i) > 0$.

Zadanie 1. Załóżmy, że (S_1, T_1) oraz (S_2, T_2) są dwoma przekrojami o minimalnej przepustowości. Czy

* $(S_1 \cup S_2, V \setminus (S_1 \cup S_2))$,
* $(S_1 \cap S_2, V \setminus (S_1 \cap S_2))$

są przekrojami o minimalnej przepustowości?

Zadanie 2. Udowodnij, że

(i) G jest k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami $x, y \in V(G)$ istnieje k wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z x do y,

(ii) G jest krawędziowo k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy pomiędzy dowolnym dwoma wierzchołkami $x, y \in V(G)$ istnieje k krawędziowo rozłącznych ścieżek z x do y.

Zadanie 3. Wykaż, że graf dwudzielny (X, Y, E) ma dopasowanie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek Hall'a, to jest, dla każdego $\emptyset \neq A \subset X$ liczba sąsiadów A w zbiorze Y jest większa bądź równa $|A|$.

Zadanie 4. Wykaż, że dla każdego grafu ważonego G istnieje drzewo ważone T określone na zbiorze wierzchołków $V(G)$ o tej własności, że: dla każdych dwóch wierzchołków u, v w G, minimalny uv-przekrój jest równy minimalnej wadze krawędzi leżącej na ścieżce od u do v w drzewie T.

Zadanie 5. Niech $(P, \leqslant)$ będzie skończonym zbiorem częściowo-uporządkowanym. Rodzinę $C_1, \ldots, C_w$ nazywamy pokryciem łańcuchowym $(P, \leqslant)$ rozmiaru w jeżeli:

* C_i jest łańcuchem w $(P, \leqslant)$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, w\}$,
* $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ dla każdego $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, w\}$,
* $P = C_1 \cup \ldots \cup C_w$.

Podaj metodę konstrukcji pokrycia łańcuchowego o minimalnym rozmiarze poprzez redukcję tego problemu do problemu znajdywania maksymalnego dopasowania w grafie dwudzielnym.

Zadanie 6. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru U i niech r_A dla każdego $A \in \mathcal{A}$ będzie elementem ze zbioru A. Powiemy, że zbiór $\{r_A : A \in \mathcal{A}\}$ *reprezentuje* zbiory z $\mathcal{A}$ jeżeli dla dowolnych dwóch $B, C \in \mathcal{A}$ mamy $r_B \neq r_C$ jeżeli $B \neq C$. Podaj warunek konieczny i wystarczający na to, by rodzina $\mathcal{A}$ miała zbiór reprezentantów.

Zadanie 7. Mamy n czekolad. Każda tabliczka czekolady składa się z t wierszy. Każda czekolada ma napis $s \in \{a, b\}^*$, co oznacza, że każde okienko w j-tej kolumnie zawiera j-tą literę słowa s. Podziałem czekolady nazywamy jej podział na dwie części, lewą i prawą, który spełnia warunek: jeżeli okienko (i, j) z i-tego wiersza i j-tej kolumny jest w części lewej, to również okienka (i, k) dla $k < j$ należą do części lewej. Część lewa jest spójna, gdyż zakładamy że czekolada zawiera lewy oraz prawy brzeg, który zawsze należy do części lewej bądź prawej odpowiednio (część lewa bądź prawa może być pusta, tzn. zawierać tylko brzeg). Mając na wejściu n czekolad: k_1 z napisem s_1, ..., k_p z napisem s_p podaj algorytm testujący, czy da się podzielić każdą z tych czekolad na część lewą i część prawą, tak by dokładnie jedna część lewa pasowała do dokładnie jednej części prawej (pochodzącej z podziału tej samej czekolady). Uwaga: powiemy, że część lewa pasuje do części prawej jeżeli możemy skleić część lewą z częścią prawą i w wyniku powstanie czekolada bez dziur, która w każdej kolumnie ma tę samą literę (może tworzyć napis inny niż s_i dla każdego $i = 1, \ldots, p$).