Grafy - Zadania różne

Zadanie 1. Pilot do telewizora potrzebuje pracuje na dwu bateriach. Aby działał obie muszą być naładowane. Mamy 9 baterii przy czym 3 są naładowane, a 6 jest rozładowanych. Jedyny sposób aby rozpoznać czy wybraliśmy dobre baterie to włożyć je do pilota i sprawdzić czy działa. Ile minimalnie prób musimy wykonać w najgorszym przypadku?

Zadanie 2. Rozważ zbiór X zawierający n punktów na płaszczyźnie takich, że odległość (euklidesowa) pomiędzy dowolnymi dwoma punktami jest $\leqslant 1$. Wykaż, że liczba dwójek punktów w X oddalonych o $> \frac{1}{\sqrt{2}}$ to co najwyżej $n^2/3$. Podak przykłady zbiorów świadczących, że to ograniczenie jest najlepsze możliwe.

Zadanie 3. Niech $ex(n, K_r)$ będzie maksymalną liczbą krawędzi w grafie na n wierzchołkach bez K_r. Wykaż, że dla $n \geqslant r + 1$ każdy graf na n wierzchołkach i o $ex(n, K_r) + 1$ krawędziach zawiera $K_{r+1} - e$ jako podgraf (klika na $r + 1$ wierzchołkach bez jednej krawędzi).

Zadanie 4. Wykaż, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ oraz liczba naturalna N takie, że każdy graf G na $n \geqslant N$ wierzchołkach oraz $\left(1 - \frac{1}{t-1} + \varepsilon\right)\binom{n}{2}$ krawędziach ma co najmniej $\delta \cdot \binom{n}{t}$ kopii K_t.

Zadanie 5. Załóżmy, że T jest drzewem oraz $\phi : V(T) \to V(T)$ jest funkcją spełniającą warunek:

$$\text{jeżeli } \{x, y\} \in E \text{ to } \phi(x) = \phi(y) \text{ lub } \{\phi(x), \phi(y)\} \in E.$$

Wykaż, że istnieje wierzchołek $v \in V(T)$ taki, że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{x, y\} \in E$ taka, że $\phi(\{x, y\}) = \{x, y\}$.

Zadanie 6. W poniższym zadaniu przez ścieżkę maksymalną rozumiemy ścieżkę maksymalną pod względem liczności.

Czy prawdą jest, że:

(i) dowolne dwie maksymalne ścieżki w grafie spójnym G mają niepuste przecięcie,
(ii) przecięcie wszystkich maksymalnych ścieżek w drzewie T jest niepuste.

Zadanie 7. Niech (X, Y, E) będzie grafem dwudzielnym. Wykaż, że rozmiar maksymalnego dopasowania w (X, Y, E) jest równy rozmiarowi minimalnego pokrycia wierzchołkowego w (X, Y, E). Czy powyższe twierdzenie jest prawdziwe w klasie wszystkich grafów?

Zbiór wierzchołków U jest *pokryciem wierzchołkowym* w grafie G jeżeli każda krawędź ma przynajmniej jeden swój koniec w U.

Zadanie 8. Wykaż, że w grafie G niezawierającym w sposób indukowany ścieżki P_4 (ścieżki prostej na 4 wierzchołkach) algorytm first-fit używa $\omega(G)$ kolorów.

Zadanie 9. Wykaż, że istnieje funkcja f taka, że dla każdego $k \geqslant 1$ i dla każdego grafu G niezawierającego w sposób indukowany ścieżki P_k zachodzi

$$\chi(G) \leqslant f(\omega(G)).$$

Zadanie 10. Macierz M rozmiaru $n \times n$ nazywamy *kwadratem łacińskim* jeżeli każdy wiersz i każda kolumna macierzy zawiera pewną permutację liczb ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

Niech n_1, n_2 będą dwiema liczbami naturalnymi mniejszymi bądź równymi n. Niech M będzie macierzą o rozmiarze $n_1 \times n_2$, której wszystkie pola $M[i][j]$ dla $1 \leqslant i \leqslant n_1$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n_2$ są wypełnione pewnymi liczbami ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ w taki sposób, że wszystkie częściowo wypełnione wiersze i kolumny zawierają różne liczby. Znajdź warunek konieczny i wystarczający na to, aby:

(i) macierz M była rozszerzalna do kwadratu łacińskiego $n \times n$ przy założeniu że $n_1 < n$ oraz $n_2 = n$,

(ii) macierz M była rozszerzalna do kwadratu łacińskiego $n \times n$ przy założeniu że $n_1 < n$ oraz $n_2 < n$.

Zadanie 11. Załóżmy, że G jest grafem na zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\}$. Macierz symboliczną T dla grafu G tworzymy następująco: jeżeli $i < j$ oraz istnieje krawędź od i do j w G, to $T[i, j] = x_{ij}$ oraz $T[j, i] = -x_{ij}$; jeżeli nie ma krawędzi od i do j to $T[i, j] = T[j, i] = 0$. Wykaż, że G ma dopasowanie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy T jest niezerowy.