Dyskretna

Jędrzej Hodor
Piotr Micek

Zestaw 1
Semestr zimowy 2023/2024
Kraków, 7 marca 2024

Zasada szufladkowa, ciąg Fibonacciego, współczynniki dwumianowe

Przyjmujemy, że liczby naturalne to $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oznaczamy $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ (czyli $[0] = \emptyset$), oraz $\mathbb{N}_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Jeśli $\varphi(\cdot, \dots, \cdot)$ jest formułą logiczną to przez $[\varphi(\cdot, \dots, \cdot)]$ ozanaczamy jej funkcję charakterystyczną, to znaczy jeśli dla argumentów $n_1, \dots, n_k$ formuła φ jest spełniona to $[\varphi(n_1, \dots, n_k)] = 1$, a w przeciwnym przypadku $[\varphi(n_1, \dots, n_k)] = 0$. Na przykład, $[n = m] = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = m$ i $[n = m] = 0$ w każdym innym wypadku.

Zasada szufladkowa

Niech $n, m \in \mathbb{N}$.

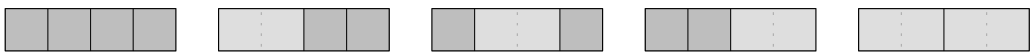
Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i $n > m$, to istnieje szuflada z przynajmniej dwoma obiektami.

Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i $n > m \cdot r$ dla pewnego $r \in \mathbb{N}$, to istnieje szuflada z przynajmniej $r + 1$ obiektami.

Ciąg Fibonacciego

Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zadany jest przez: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg ten zlicza wiele interesujących obiektów kombinatorycznych.

Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ rozważ prostokąt o wymiarach $1 \times n$ podzielony na n kwadratów. Taki prostokąt będziemy nazywać *n-planszą*. *Kafelkowaniem* n-planszy nazywamy dowolne jej pokrycie kwadratami 1×1 i kostkami domino 1×2 takie, że żadne dwa elementy się nie nachodzą. Niech f_n będzie liczbą wszystkich kafelkowań tego prostokąta. Dla przykładu poniżej podajemy wszystkie kafelkowania 4-planszy, zatem $f_4 = 5$. Zauważ, że 0-plansza ma jedno puste kafelkowanie więc $f_0 = 1$.



Pokażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mamy $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem wszystkich kafelkowań $(n+2)$-planszy. Niech $\mathcal{B}$ będzie sumą rozłączną wszystkich kafelkowań $(n+1)$-planszy i n-planszy. Rozważ następującą funkcję z $\mathcal{A}$ w $\mathcal{B}$. Dla danego kafelkowania w $\mathcal{A}$ usuń jego ostatni element. Nietrudno sprawdzić, że wynik funkcji jest zawsze w $\mathcal{B}$ oraz że funkcja ta jest odwracalna, a zatem bijektywna. Ponadto $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$.Wszystko to dowodzi, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$f_n = F_{n+1}.$$

Współczynnik dwumianowy

Współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$, dla ustalonych $n, k \in \mathbb{N}$, to liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Niech $n, k \in \mathbb{N}$, wtedy dostajemy, że

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
(ii) $\binom{n}{k} = 0$ jeśli $k > n$,
(iii) $\binom{n}{1} = n$ jeśli $n > 0$,
(iv) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ jeśli $n \geqslant k$,
(v) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ jeśli $n \geqslant k > 0$,
(vi) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ jeśli $n \geqslant k$,
(vii) $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ jeśli $n \geqslant k$.

Nazwa współczynniki dwumianowe bierze się z następującego rozwinięcia dwumianu: dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

W szczególności dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

(i) $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$,
(ii) $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$,
(iii) $0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i$.

Zasada szufladkowa

Przykład. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Dla dowolnych $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $[2n]$ zawsze znajdziemy dwie względnie pierwsze ze sobą.

Szkic rozwiązania. Wystarczy zauważyć, że wśród wybranych liczb będą dwie kolejne liczby (a takowe będą względnie pierwsze). Szufladki są postaci $\{2i-1, 2i\}$ dla $i \in [n]$.

Zadanie 1. Wykaż, że w grupie $n \in \mathbb{N}_2$ osób istnieją dwie, które mają taką samą liczbę znajomych (zakładamy, że relacja bycia znajomym jest symetryczna).

Zadanie 2. Rozważ turniej rozgrywany przez $n \in \mathbb{N}_2$ drużyn w którym docelowo każda drużyna gra z każdą inną dokładnie raz. Wykaż, że w każdym momencie istnieją dwie drużyny z taką samą liczbą dotychczas rozegranych gier (niezależnie od grafiku rozgrywek).

Zadanie 3. Niech $n \in \mathbb{N}_2$. Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n-elemetowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.

Zadanie 4. Niech n. Przy okrągłym stole jest $n \in \mathbb{N}_2$ miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej dwóch ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.

Zadanie 5. Pokaż, że w dowolnym ciągu $n \in \mathbb{N}_1$ liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.

Zadanie 6. Niech $n \in \mathbb{N}_2$. Udowodnij, że dla dowolnych $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $1, 2, \ldots, 2n$ zawsze znajdziemy dwie, z których jedna dzieli drugą.

Zadanie 7. Niech $n \in \mathbb{N}_2$. Dla n-elementowego zbioru X rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{F}$, gdzie $|F| > n/2$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje $x \in X$ należący do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{F}$.

Ciąg Fibonacciego

Zadanie 8. Ile jest słów długości $n \in \mathbb{N}$ nad alfabetem $\{0, 1\}$, które nie zawierają dwóch jedynek obok siebie?

Zadanie 9. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$:

$$F_{n+2} + \sum_{i=1}^{n-1} F_i 2^{n-k-1} = 2^n.$$

Zadanie 10. Na ile sposób można podzielić liczbę $n \in \mathbb{N}_1$ na składniki większe niż 1, gdzie kolejność składników ma znaczenie. Na przykład, dla liczby 6 odpowiedź wynosi 5: $(2+2+2 = 3+3 = 2+4 = 4+2 = 6)$.

Zadanie 11. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech $S_n = \{F \subseteq \mathbb{N} : \min F \geqslant |F|, \max F = n\}$. Znajdź wartość $|S_n|$.

Zachęcamy do rozwiązywania kolejnych zadań (12-19) korzystając z interpretacji przez zliczanie kafelkowań.

Zadanie 12. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1.$$

Wskazówka: Rozważ pozycję ostatniej kostki domino w kafelkowaniu $(n+2)$-planszy.

Zadanie 13. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} f_{2i} = f_{2n+1}.$$

Wskazówka: Rozważ pozycję ostatniego kwadratu w kafelkowaniu $(2n+1)$-planszy.

Zadanie 14. Udowodnij, że dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}_1$:

$$f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}.$$

Wskazówka: Rozważ pozycje m i $m+1$ w kafelkowaniu $(m+n)$-planszy.

Zadanie 15. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = f_n.$$

Wskazówka: Warto przyjąć, że i to liczba kostek domino w kafelkowaniu n-planszy.

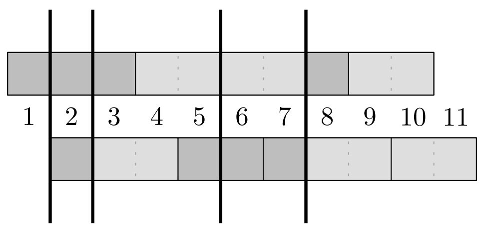
Zadanie 16. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i,j} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i} = f_{2n+1}.$$

Zadanie 17. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f_{i-1} = f_{2n-1}.$$

Rozważ nieskończoną w obie strony planszę z polami indeksowanymi liczbami w $\mathbb{Z}$. Powiedzmy, że mamy dwie skończone plansze. Jedną z nich kładziemy tak, aby jej pierwszy kwadrat leżał na polu indeksowanym 1. Drugą kładziemy z dowolnym przesunięciem. Rozważ parę (X, Y), gdzie X jest kafelkowaniem pierwszej planszy i Y jest kafelkownaiem drugiej planszy. Mówimy, że i jest *punktem łamania* tej pary jeśli w żadnym z kafelkowań na polach indeksowanych i i $i+1$ nie leży domino. Zobacz przykład na rysunku poniżej. W tym wypadku zbiór istotnych punktów łamania to $\{1, 2, 5, 7\}$.



Zadanie 18. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$:

$$f_n^2 = f_{n+1} f_{n-1} + (-1)^n.$$

Wskazówka: Rozważ dwa kafelkowania n-plansz i ustaw je z przesunięciem o jeden. Zlokalizuj ostatni istotny punkt łamania i zamień ogony.

Zadanie 19. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}.$$

Współczynniki dwumianowe

Zadanie 20. Ile rozwiązań ma równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2024,$$

(i) gdzie x_i są liczbami naturalnymi?
(ii) gdzie x_i są dodatnimi liczbami naturalnymi?

Zadanie 21. Wykaż, że liczba podziałów zbioru $[n-1]$ jest równa liczbie podziałów zbioru $[n]$ niezawierających sąsiednich liczb w jednym bloku. Przez podział rozumiemy podział na nierozróżnialne części.

Zadanie 22. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Funkcja $f : [n] \to [n]$ jest *monotoniczna* jeśli dla wszystkicj $i, j \in [n]$ z $i < j$ mamy $f(i) \leqslant f(j)$. Ile jest funkcji monotonicznych na $[n]$?

Zadanie 23. Niech $n \in \mathbb{N}$. Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb.

Zadanie 24 (Reguły sumowania)**.** Udowodnij, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Zadanie 25. Dla ustalonych $n, m \in \mathbb{N}$ wyznacz postać zwartą

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{k}{m} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{k}{m}.$$

Zadanie 26. Dla ustalonych $n, k \in \mathbb{N}$, posługując się interpretacją kombinatoryczną udowodnij, że

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}.$$

Zadanie 27. Dla ustalonch $n, m, k \in \mathbb{N}$, posługując się interpretacją kombinatoryczną udowodnij:

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1},$$
$$\sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} = (n+n^2)2^{n-2},$$
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Zadanie 28. Korzystając z rozwinięcia dwumianiu $(1+x)^n$ udowodnij, tożsamości z poprzedniego zadania.

Zadanie 29. Wykazać, że dla dowolnej liczby pierwszej p, dowolnego $a \in \mathbb{N}_1$ oraz $k \in [p^a - 1]$ liczba $\binom{p^a}{k}$ jest podzielna przez p.

Zadanie bonusowe do spisania

Niech $p, q \in \mathbb{N}_1$ i niech

$$S_n(p,q) = \{F \subseteq \mathbb{N} : q \min F \geqslant p|F|, \max F = n\}.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $a_n = |S_n(p,q)|$.

Problem 1. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1} \binom{q}{k} a_{n-k} + a_{n-(p+q)}.$$

Wskazówka: Warto pokazać, że jeśli $X \subseteq \{n-q, \ldots, n-1\}$ i $A_X = \{F \in S_n(p,q) : X \cap F = \emptyset\}$, to $|A_X| = |S_{n-|X|}(p,q)|$.

Problem jest wart 1 punkt. Za rozwiązanie przypadku, gdzie $q = 1$ można otrzymać maksymalnie 0,3 punktu, natomiast za przypadek, gdzie $p = 1$ maksymalnie 0,5 punktu. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu w terminie do niedzieli 10 marca 23:59.