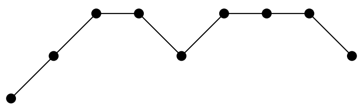
Liczby Catalana

Niech $n \in \mathbb{N}$. *Ścieżką długości* n nazywamy ciąg długości n złożony z elementów $\{-1, 0, 1\}$. Liczby $-1, 0, 1$ można interpretować jako kroki D, L, U (down, level, up odpowiednio). Dokładniej, ścieżki będziemy czasem przedstawiać graficznie – zaprezentujemy to na przykładzie. Rozważmy ścieżkę $1, 1, 0, -1, 1, 0, 0, -1$. Jest to ścieżka długości 8. Można ją równoważnie zapisać jako $UULDULLD$ lub narysować tak jak na rysunku 1. Zauważ, że suma pierwszych k wyrazów odpowiada "poziomowi", na którym znajdujemy się po k krokach.



Rysunek 1: Przykład ścieżki długości 8.

Ścieżka $x \in \{-1, 1\}^n$ jest *parzystą ścieżką Dycka* jeśli dla każdego $k \in [n]$ mamy, $\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant 0$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Patrząc na to graficznie: nie ma kroków poziomych, nigdy nie schodzimy poniżej poziomu 0, ale kończymy ścieżkę na poziomie 0.

Mówimy, że ścieżka $x \in \{-1, 1\}^n$ jest *nieparzystą ścieżką Dycka* jeśli dla każdego $k \in [n]$ mamy $\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant 1$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Zauważ, że jeśli $x_1, \ldots, x_n$ jest nieparzystą ścieżką Dycka to $x_2, \ldots, x_n$ jest parzystą ścieżką Dycka, a jeśli $y_1, \ldots, y_n$ jest parzystą ścieżką Dycka to $1, y_1, \ldots, y_n$ jest nieparzystą ścieżką Dycka.

Ścieżka kratowa to ciąg elementów $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ takich, że kolejny powstaje z następnego poprzez dodanie $(1, 0)$ (krok poziomy) lub poprzez dodanie $(0, 1)$ (krok pionowy). Mówimy, że ścieżka kratowa $((x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{2n}, y_{2n}))$ jest *kratową ścieżką Dycka* jeśli $x_0 = y_0 = 0$, $x_{2n} = y_{2n} = n$ i dla każdego $i \in [n]$ mamy $y_i \leqslant x_i$ (czyli nigdy nie przekraczamy przekątnej). Rysunek 2 przedstawia porównanie ścieżek Dycka długości 6 i odpowiadających im ścieżek kratowych. Zauważ, że jest to jedynie zmiana języka, czy też prezentacji.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy następujące rodziny:

$\mathcal{S}_n =$ zbiór ścieżek Dycka długości $2n + 1$,
$\mathcal{D}_n =$ zbiór ścieżek Dycka długości $2n$,
$\mathcal{G}_n =$ zbiór kratowych ścieżek Dycka długości $2n$,
$\mathcal{T}_n =$ zbiór triangulacji $(n + 2)$-kąta foremnego,
$\mathcal{B}_n =$ zbiór n-wierzchołkowych drzew binarnych,
$\mathcal{P}_n =$ zbiór $(2n + 1)$-wierzchołkowych pełnych drzew binarnych,
$\mathcal{R}_n =$ zbiór $(n + 1)$-wierzchołkowych drzew narysowanych,
$\mathcal{N}_n =$ zbiór nawiasowań ciągu $x \circ x \circ \cdots \circ x$, gdzie x występuje $n + 1$ i $\circ$ jest binarną operacją.

Na wykładzie udowodniliśmy, że

$$|\mathcal{S}_n| = |\mathcal{D}_n| = |\mathcal{G}_n| = |\mathcal{T}_n| = |\mathcal{B}_n| = |\mathcal{P}_n| = |\mathcal{R}_n| = |\mathcal{N}_n|.$$

Wartość tę nazywamy *ntą liczbą Catalana* i oznaczamy C_n. Wiemy, że

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$

Zaczynając od C_0 pierwsze liczby Catalana to:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \ldots$$

Ponadto, wiemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}. \tag{a}$$

W szczególności jeśli mamy rodzinę zbiorów obiektów $\{\mathcal{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i pokażemy, że $|\mathcal{X}_0| = 1$ oraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $|\mathcal{X}_{n+1}| = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{X}_k|\cdot|\mathcal{X}_{n-k}|$ to udowodnimy, że $|\mathcal{X}_n| = C_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadania

Niech $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 1. Rozważmy klasyczną szachownicę 8×8. Powiedzmy, że na polach A1 i A2 zostały ustawione pionki, a pozostałe pola są puste. Celem jest przesunięcie pionka z pola A2 na pole A8 i pionka z pola A1 na pole A7. Pionki mogą się ruszać o jedno pole na ruch (czyli z Ai na A$(i+1)$ dla $i \in [7]$). Dwa pionki nie mogą równocześnie stać na tym samym polu. Ile jest różnych sekwencji ruchów, które doprowadzają do celu?

Zadanie 2. Dla dowolnego zbioru X, jego *permutacją* nazywamy funkcję $\sigma : X \to X$, która jest bijekcją. Mówimy, że permutacja σ na $[n]$ *unika* 312 jeśli nie istnieją $i, j, k \in [n]$ takie, że $i < j < k$ i $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$. Na przykład, permutacja 1632754 nie unika 312. Świadczy o tym 624, czyli formalniej $i = 2, j = 4, k = 7$. Ile jest permutacji $[n]$ unikających 312?

Zadanie 3. Ile jest $(n+1)$-elementowych multizbiorów mających elementy ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ takich, że suma wszystkich elementów z multizbioru (z wielokrotnościami) jest podziena przez n? Na przykład, suma elementów $\{1, 1, 2, 2\}$ jest podzielna przez 3, podczas gdy suma elementów $\{0, 1, 2, 2\}$ nie jest.

Wskazówka: Przypomnij sobie dowód z wykładu, gdzie pojawiły się klasy równoważności.

Zadanie 4. Rozważ wszystkie trangulacje $(n+2)$-kąta foremnego o wierzchołkach ponumerowanych po kolei liczbami z $[n+2]$ (zbiór $\mathcal{T}_n$). Trójkąt w triangulacji jest *dobry* jeśli jego zbiór wierzchołków jest postaci $\{1, i, i+1\}$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$ takiego, że $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Dla triangulacji T, niech d_T będzie liczbą dobrych trójkątów w T. Jaka jest wartość $\Sigma_{T \in \mathcal{T}_n} d_T$? Patrz przykład na rysunku 3.

Zadanie 5. Trójkąt w trangulacji wielokąta foremnego nazywamy *wewnętrznym* jeśli żadna z jego krawędzi nie jest krawędzią wielokąta. Dla triangulacji T, niech i_T będzie liczbą wewnętrznych trójkątów w T. Jaka jest wartość $\Sigma_{T \in \mathcal{T}_n} i_T$? Na rysunku 3 nie ma żadnych wewnętrznych trójkątów, ale za to można je znaleźć na rysunku 4.

Zadanie 6. Rozważ ścieżki Dycka długości $2n+2$, w których po pierwszym kroku w dół następny jest również w dół. Patrz przykład na rysunku 6. Ile jest takich ścieżek?

Zadanie 7. Rozważ ścieżki Dycka długości $4n$, w których każdy maksymalny segment kroków w dół ma długość 2. Patrz przykład na rysunku 7. Ile jest takich ścieżek?

Zadanie 8. Ile jest par (α, β) ciągów dodatnich liczb całkowitych mających tyle samo elementów (powiedzmy m) takich, że dla każdego $k \in [m]$ mamy $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ oraz $n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i$? Na przykład, dla $n = 3$ takie pary to: $(111, 111)$, $(12, 12)$, $(21, 21)$, $(21, 12)$ i $(3, 3)$.

Zadanie 9. Ile jest ciągów liczb całkowitych dodatnich $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$ takich, że dla każdego $i \in [n-1]$ mamy $a_i \leqslant 2i$? Na przykład dla $n = 3$ patrzymy na ciągi dwuelementowe, czyli $12, 13, 14, 23, 24$ (ciąg 34 jest zły ponieważ $3 > 2 \cdot 1$).

Zadanie 10. Ile jest ciągów liczb całkowitych $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant n$ zawierających dokładnie jeden punkt stały, czyli takich, że istnieje dokładnie jedno $i \in [n]$, dla którego $a_i = i$?

Zadanie 11. Rozważ rodzinę wszystkich drzew narysowanych na n wierzchołkach, gdzie każdy liść, który sąsiaduje z korzeniem jest pokolorowany na czerwono lub na niebiesko. Patrz przykład na rysunku 5. Ile jest takich obiektów?

Zadanie 12. Mówimy, że podział $X_1, \ldots, X_m$ zbioru $[n]$ na nierozróżnialne bloki jest *nieprzeplatający* jeśli dla dowolnych $a, b, c, d \in [n]$, gdzie $a < b < c < d$ jeśli $a, c \in X_i$ i $b, d \in X_j$ dla pewnych $i, j \in [m]$ to $i = j$. Na przykład wszystkie podziały $[4]$ są nieprzeplatające z wyjątkiem $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$. Ile jest nieprzeplatających się podziałów $[n]$?

Wskazówka: drzewa narysowane.

Zadanie 13. Mówimy, że ciąg 1 jest *porządny*. Jeśli ciąg x jest porządny to ciąg $x1$ jest porządny. Jeśli ciąg $x = x_0 x_1 \ldots x_k$ jest porządny to ciąg $x_0 x_1 \ldots x_j y x_{j+1} \ldots x_k$ jest porządny jeśli $y = x_j + x_{j+1}$. Porządne ciągi długości 4 to: $1111, 1211, 1121, 1231, 1321$. Ile jest porządnych ciągów długości $n+1$?

Wskazówka: triangulacja $(n+2)$-kąta powinna wygenerować porządny ciąg.

Zadanie 14. Rozważmy $2n$ punktów na okręgu. Niech X_n będzie liczbą sposobów, na które można połączyć te punkty w pary tak aby cięciwy między parami punktów się nie przecinały. Patrz przykład na rysunku 8.

(i) Wykaż, że liczby $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełniają (a) i $X_0 = C_0 = 1$, zatem $X_n = C_n$.
(ii) Skonstruuj bijekcję pomiędzy obiektami zliczanymi przez X_n i obiektami w $\mathcal{D}_n$.

Rozważ n punktów na okręgu. Podzbiór odcinków o końcach w tych punktach jest *zbiorem Motzkina*, jeśli każde dwa odcinki są rozłączne (nie mogą mieć wspólnych końców). *Liczba Motzkina* M_n to liczba zbiorów Motzkina na okręgu z n punktami. Patrz przykład na rysunku 9. Początkowe wartości liczb Motzkina począwszy od M_0 to:

$$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, \ldots$$

Zadanie 15. Udowodnij, że

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} C_k.$$

Zadanie 16. Udowodnij, że jeśli $n > 1$ to

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M_i M_{n-2-i}.$$

Ścieżkami Motzkina długości n nazywamy elementy zbioru

$$\mathcal{M}_n = \left\{ x \in \{-1, 0, 1\}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \text{ oraz } \sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant 0 \text{ dla każdego } k \in [n] \right\}.$$

Zadanie 17. Wykaż, że $|\mathcal{M}_n| = M_n$ na dwa sposoby.

(i) Korzystając z zadania 16.
(ii) Konstruując bijekcję pomiędzy ścieżkami Motzkina, a zbiorami Motzkina.

Drzewo narysowane jest *krzakiem* jeśli żaden wierzchołek (być może z wyjątkiem korzenia) nie ma stopnia 2. Definiujemy

$$\mathcal{K}_n = \text{zbiór } (n+2)\text{-wierzchołkowych krzaków.}$$

Zadanie 18. Ile elementów ma zbiór $\mathcal{K}_n$?

Wskazówka: mając dany krzak przypisz (prawie) każdej krawędzi etykietę ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$.

Zadanie 19. *Krzak ważony* to krzak, gdzie każda krawędź ma przypisaną wagę ze zbioru $\mathbb{N}_1$. Ile jest krzaków ważonych o sumie wag n?

Zadanie 20. Udowodnij, że

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k.$$

Wskazówka: poprzednie zadanie.

Zadanie 21. *Ważona ścieżka Motzkina* to ścieżka Motzkina, gdzie każdy wierzchołek ma przypisaną wagę ze zbioru $\mathbb{N}_1$. Ile jest ważonych ścieżek Motzkina o sumie wag n? Patrz przykład na rysunku 10.

Zadanie 22. Udowodnij, że

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} C_k.$$

Zadanie 23. Jeśli $n > 0$ to ile jest wszystkich ścieżek Motzkina długości $n-1$, gdzie każdy krok poziomy jest pokolorowany na jeden z dwóch kolorów? Na przykład, wszystkie takie ścieżki długości 2 to: UD, LL, LL, LL i LL. Natomiast $LULULDD$ jest przykładem takiej ścieżki długości 7.

Zadanie bonusowe do spisania (1,5 pkt)

Problem 1. Ile jest par ścieżek kratowych z zaczynających się w $(0,0)$ i mających $n+1$ punktów takich, że ich jedyne punkty wspólne to poczatek i koniec? Patrz przykład na rysunku 11.

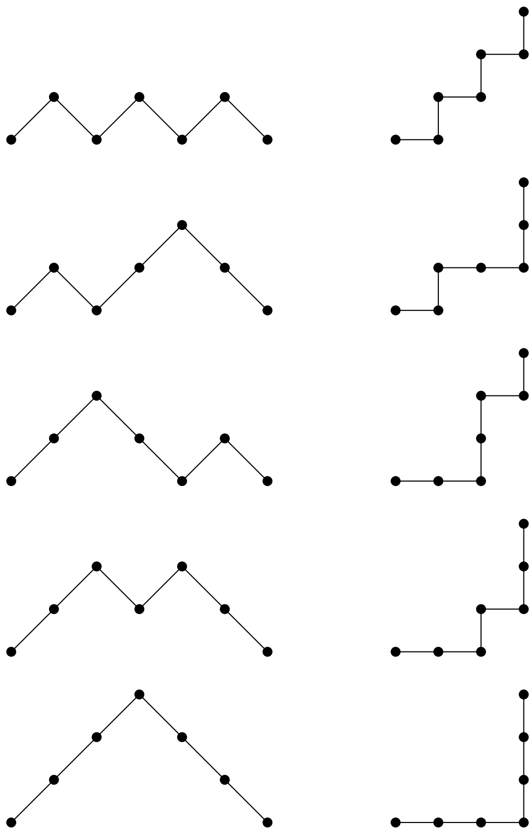
Problem 2. Pokaż, że liczba ścieżek kratowych z $(0,0)$ do $(2n,2n)$, które nie przechodzą przez punkty na przekątnej mające nieparzyste współrzędne (czyli punkty $(2i-1,2i-1)$ dla $i \in [n]$) jest równa C_{2n}.

Problem 3. Mówimy, że ścieżka Dycka jest na poziomie i jeśli aktualna suma częściowa wynosi i. Niech dla ścieżki Dycka P i liczby $i \in \mathbb{N}$ wartość $k_i(P)$ oznacza liczbę kroków w górę z poziomu $i-1$ do i w P. Udowodnij, że

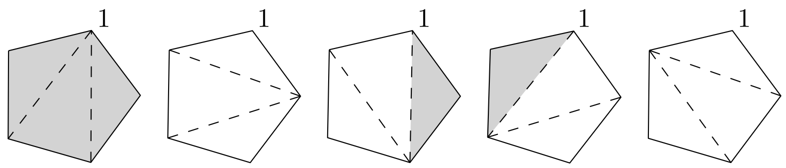
$$\sum_{(P,Q)\in\mathcal{D}_n\times\mathcal{D}_n} \sum_{i\in\mathbb{N}_1} k_i(P)k_i(Q) = C_{2n} - C_n^2.$$

Każdy problem jest wart 0,5 punkta. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu. Termin: czwartek 21 marca 23:59.

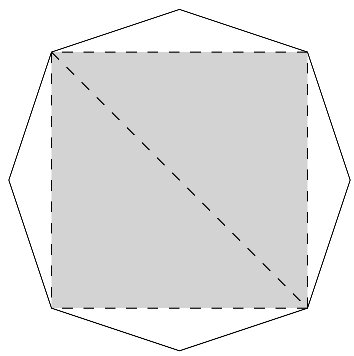
Rysunki



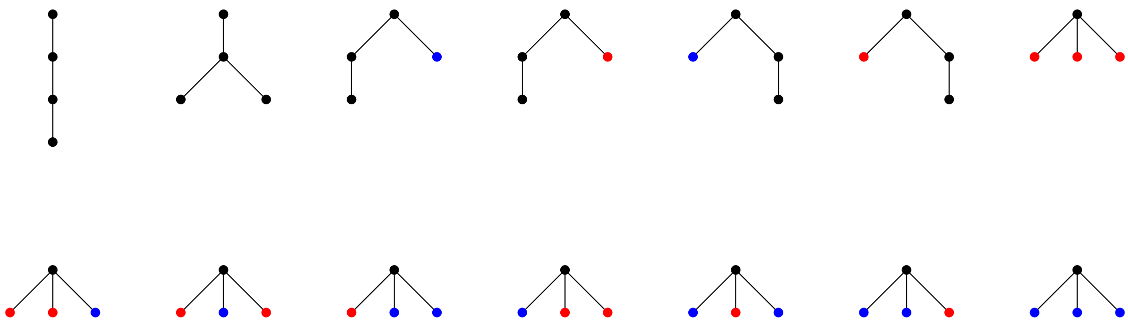
Rysunek 2: Po lewej mamy wszystkie ścieżki Dycka długości 6, a po prawej wszystkie kratowe ścieżki Dycka długości 6.



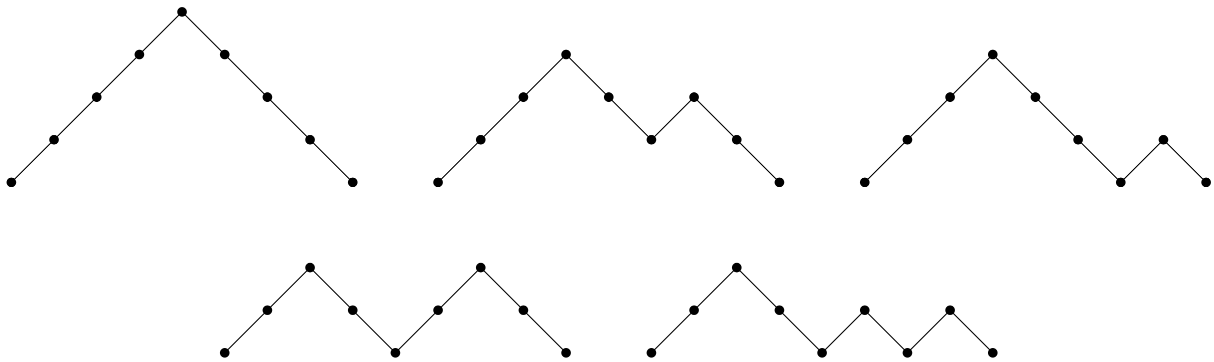
Rysunek 3: Weźmy $n = 3$, czyli rozważamy triangulacje pięciokąta. Jest 5 trangulacji pięciokąta. Na szaro zaznaczone są dobre trójkąty, których również jest 5. Wartości d_T to odpowiednio $3, 0, 1, 1, 0$ dla kolejnych trangulacji na rysunku.



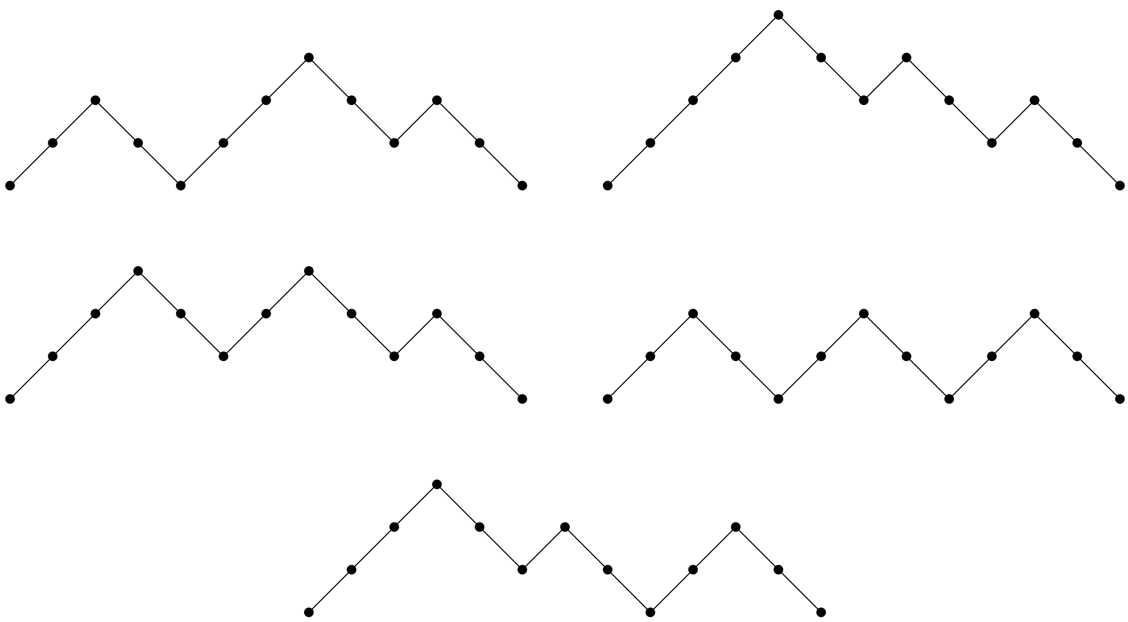
Rysunek 4: Triangulacja ośmiokąta z zaznaczonymi dwoma trójkatami wewnętrznymi.



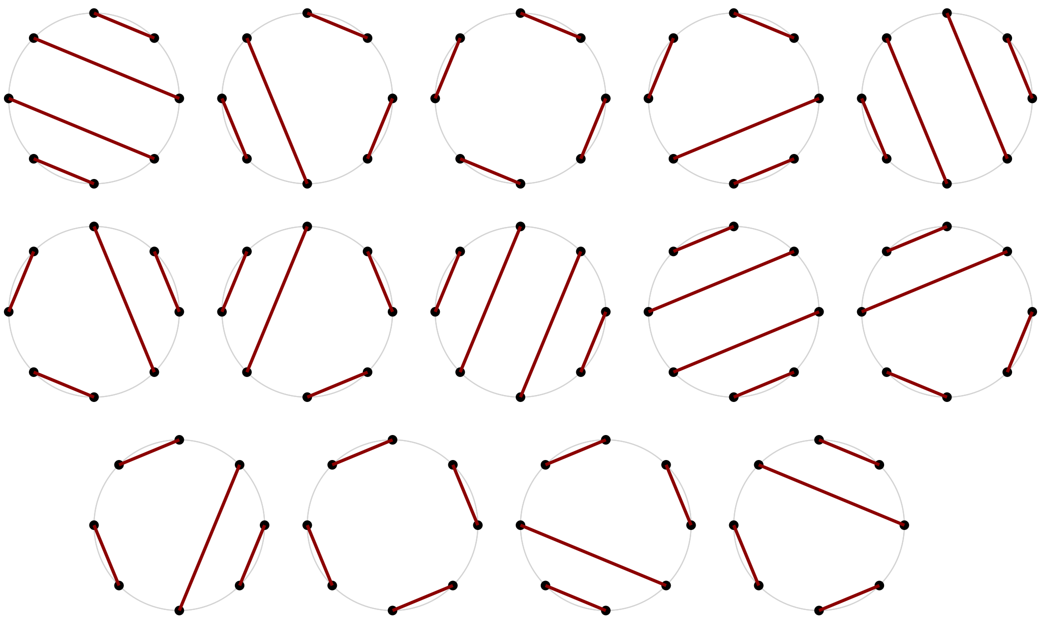
Rysunek 5: Wszystkie 4-wierzchołkowe drzewa narysowane, gdzie każdy liść sąsiadujący z korzeniem jest pokolorowany na czerwono lub na niebiesko. Mamy 14 takich obiektów ($n = 4$).



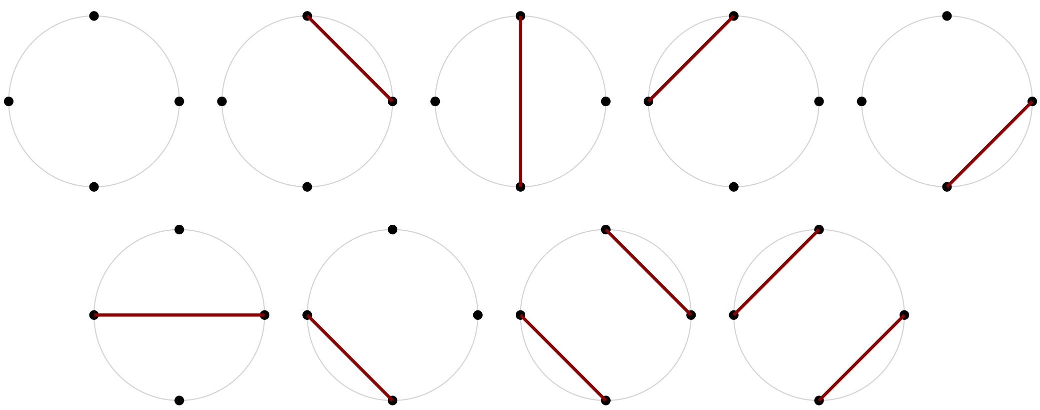
Rysunek 6: Wszystkie ścieżki długości 8 spełniające warunki. Mamy 5 takich obiektów ($n = 3$).



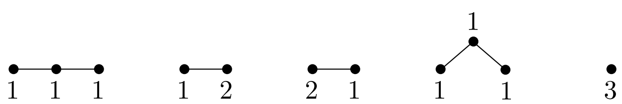
Rysunek 7: Wszystkie ścieżki długości 12 spełniające warunki. Mamy 5 takich obiektów ($n = 3$).



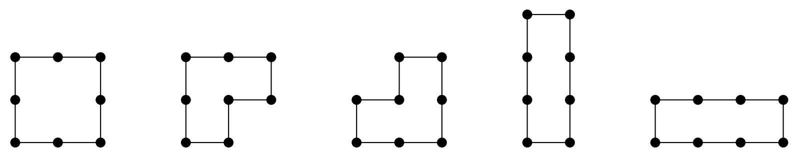
Rysunek 8: Wszystkie cięciwy między 8 punktami na okręgu. Mamy 14 takich obiektów ($n = 4$).



Rysunek 9: Wszystkie zbiory Motzkina na okręgu z 4 punktami. Czyli mamy 9 takich obiektów i $M_4 = 9$.



Rysunek 10: Wszystkie ważone ścieżki Motzkina, których suma wag to 3.



Rysunek 11: Wszystkie pary ścieżek długości 4 spełniające warunek.