Funkcje tworzące II

Zadania

Zadanie 1. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{a+b=n} \binom{2a}{a}\binom{2b}{b} = 4^n.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{a+b=n} \binom{2a}{a}\binom{2b}{b}(-1)^a = 2^n\binom{n}{n/2}.$$

Uwaga: Przyjmujemy, że $\binom{n}{k}$ dla k niecałkowitych jest 0.

Zadanie 3. Niech $p_0 = 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, niech p_n oznacza liczbę podziałów zbioru $[n]$ na rozłączne przedziały kolejnych liczb, gdzie dla każdego przedziału wybieramy jednego specjalnego reprezentanta. Na przykład $p_1 = 1$, $p_2 = 3$ i $p_3 = 8$, ponieważ wszystkie takie podziały $[3]$ to

$$\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1\},\{2,3\}\},$$
$$\{\{1\},\{2,3\}\},\ \{\{1,2,3\}\},\ \{\{1,2,3\}\},\ \{\{1,2,3\}\}.$$

Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$p_n = 2[n>0]p_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} p_i + [n>0].$$

Następnie wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ i na jej podstawie wyznacz p_n. Odpowiedź powinna być wyrażona w terminach pewnego znanego ciągu.

Zadanie 4. Niech $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem z poprzedniego zadania i niech $P(x)$ będzie jego funkcją tworzącą. Niech $G(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij kombinatorycznie, że

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} G(x)^i = \frac{G(x)}{1-G(x)}.$$

Zadanie 5. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n,\ k_i>0} k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m.$$

Znajdź funkcję tworzącą takiego ciągu i oblicz a_n.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla ustalonego $m \in \mathbb{N}_1$ funkcja tworząca ciągu $\left(\left\{ {n \atop m} \right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ to

$$S(x) = \frac{x^m}{\prod_{i=1}^{m}(1-ix)}.$$

Zadanie 7. Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \frac{i^n}{i!(m-i)!}.$$

Wywnioskuj, że

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!},$$

gdzie B_n to $n$ta liczba Bella.

Zadanie 8. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ i niech $k = \lfloor m/2 \rfloor$. Przedstaw dowód następującej kongruencji przez funkcje tworzące

$$\left\{ {n \atop m} \right\} \equiv \binom{n-k-1}{n-m} \mod 2.$$

Zadanie 9. Udowodnij, że dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (H_{m+n} - H_m) \binom{m+n}{n} x^n.$$

Wskazówka: Rozwiń w szereg $\frac{1}{(1-x)^{y+1}}$, a następnie weź pochodną obustronnie względem y i na koniec podstaw $y = m$.

Zadanie 10. Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że dla ustalonego $m \in \mathbb{N}$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{m} \frac{1}{n-i} = (H_n - H_m) \binom{n}{n-m}.$$

Zadanie 11. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, niech s_n oznacza liczbę ścieżek w $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ z $(0,0)$ do (n,n), gdzie dopuszczalne kroki to $(1,0), (0,1), (1,1)$. Znajdź zwarty wzór na funkcję tworzącą ciągu $(s_n)_{n=0}^{\infty}$.

W następnych zadaniach może być przydatny fakt, że funkcja tworząca liczb Catalana $C(x)$ spełnia równanie

$$xC(x)^2 = C(x) - 1.$$

Zadanie 12. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Na ile sposobów można zapisać n jako sumę składników (kolejność ma znaczenie), gdzie każdy składnik równy k dla $k \in [n]$ jest pokolorowany na jeden z C_{k-1} kolorów? Na przykład 4 można zapisać w ten sposób na 14 sposobów bo $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1 = 1+3 = 3+1 = 2+2 = 4 = 4 = 4 = 4 = 4$.

Wskazówka: Wyżej wspomniane równanie można przekształcić do $C(x) = \frac{1}{1-xC(x)}$.

Zadanie 13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozważ wszystkie ścieżki Dycka długości $2n+2$ takie, że każdy maksymalny segment kroków w dół, który kończy się na poziomie 0 ma długość nieparzystą, patrz rysunek 1. Niech d_n będzie liczbą takich ścieżek. Naszym celem jest pokazać, że $d_n = C_n$. Niech a_n i b_n będą liczbą niepustych ścieżek Dycka długości $2n$ takich, które są na poziomie 0 jedynie na początku i na końcu, oraz, gdzie liczba kroków w dół w ostatnim maksymalnym segmencie jest nieparzysta i odpowiednio parzysta. Niech $A(x)$ i $B(x)$ będą funkcjami tworzącymi dla tych ciągów, czyli $A(x) = x + x^3 + 2x^4 + 6x^5 + \dots$ i $B(x) = x^2 + x^3 + 3x^4 + 8x^5 + \dots$. Niech $C(x)$ będzie funkcją tworzącą dla liczb Catalana. Wyraź w prosty sposób $A(x)$ za pomocą $B(x)$ i $C(x)$, oraz $B(x)$ za pomocą $A(x)$ i $C(x)$. Następnie wyraź funkcję tworzącą dla ciągu $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ za pomocą $A(x)$ i korzystając z powyższego udowodnij, że jest ona równa $C(x)$.

Zadanie 14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozważ rodzinę ścieżek Dycka długości $2n+2$, takich, że ich najbardziej lewy szczyt (czyli punkt między krokami U i D) jest na wysokości 2 lub 3 oraz niemających szczytów na poziomie 1. Patrz rysunek 2. Ile jest takich ścieżek?

Wskazówka: znajdź funkcję tworzącą $F(x)$ dla ciągu zliczającego liczbę ścieżek bez szczytu na poziomie 1. Za pomocą $C(x)$ i $F(x)$ wyraź funkcję tworzącą dla szukanego ciągu.

Zadanie 15. Korzystając z technik funkcji tworzących, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{i+j=n} C_{2i}C_{2j} = 4^n C_n.$$

Wskazówka: Niech $E(x) = \frac{C(x)+C(-x)}{2}$. Wykaż, że $E(x)^2 = C(4x^2)$.

Niech $G(x)$ będzie szeregiem formalnym spełniającym równanie dla pewnego $m \in \mathbb{N}_2$:

$$G(x) = xG(x)^m + 1. \tag{$\star$}$$

Dla $m \in \mathbb{N}_2$, *drzewo m-arne* to drzewo puste lub drzewo ukorzenione, gdzie każdy wierzchołek ma m liniowo uporządkowanych dzieci, z których każde jest drzewem m-arnym. Zauważ, że dla każdego $m \in \mathbb{N}_2$ funkcja tworzącą ciągu zliczającego n wierzchołkowe m-arne drzewa spełnia równanie ($\star$).

Zadanie 16. *Drzewo Fibonacciego* to drzewo ukorzenione, gdzie korzeń ma jedno dziecko, dziecko wierzchołka mającego jedno dziecko ma dwoje dzieci oraz dla każdego wierzchołka mającego dwoje dzieci, jedno z tych dzieci ma jedno dziecko, a drugie dwoje. Patrz rysunek 3. Udowodnij, że ciąg zliczający liczbę zamkniętych spacerów zaczynających się w korzeniu ma funkcję tworzącą $F(x)$ spełniającą $F(x) = xF(x)^3 + 1$.

Podziały

Niech $n, k \in \mathbb{N}_1$. *Podział liczby n na k składników* to przedstawienie n w postaci sumy

$$a_1 + \ldots + a_k = n,$$

gdzie $a_i \in \mathbb{N}_1$ dla każdego $i \in [k]$ oraz $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_k$.

Jeśli φ to pewna własność podziału liczby to przez $p(n \mid \varphi)$ oznaczamy wszystkie podziały n spełniające własność φ. Na przykład, $p(n, k) := p(n \mid \text{podział ma } k \text{ składników})$.

Diagram Ferrersa dla podziału $n = a_1 + \ldots + a_k$ to tabelka składająca się z k wierszy, w której i-ty wiersz zawiera a_i elementów.

Podział n jest *samosprzężony* jeśli jego diagram Ferrersa jest symetryczny względem "przekątnej"

Zadanie 17. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(i) $p(n, k) = p(n \mid \text{największy składnik to } k)$,
(ii) $p(n + k, k) = p(n \mid \text{każdy składnik jest} \leqslant k)$,
(iii) $p(n \mid \text{samosprzężony}) = p(n \mid \text{składniki parami różne i nieparzyste})$.

Zadanie 18. Wykaż, poniższą równość pokazując, że obie strony generują ciąg $(p(n \mid \text{samosprzężony}))_{n=0}^{\infty}$

$$(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5) \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1 - x^2)(1 - x^4) \ldots (1 - x^{2k})}.$$

Zadanie 19. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$p(n \mid \text{parzysta liczba skł. parzystych}) - p(n \mid \text{nieparzysta liczba skł. parzystych}) \\ = p(n \mid \text{samosprzężony}).$$

Zadanie 20. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, niech

$$a_n = p(n \mid \text{każdy składnik jest potęgą dwójki}).$$

Na przykład, $a_4 = 4$ bo $4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$. Przyjmijmy $a_0 = 1$. Niech $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Korzystając z funkcji tworzących udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a_{2n} = a_{2n+1} = b_n$.

Zadanie bonusowe do spisania

Celem tego zadania będzie policzenie liczby drzew m-arnych o n wierzchołkach. Właściwie policzymy coś ogólniejszego, z czego powyższe będzie wynikać.

Ustalmy $m \in \mathbb{N}_2$ i $\ell \in \mathbb{N}_1$. Niech $G(x)$ będzie szeregiem formalnym spełniającym równanie ($\star$) i niech $H(x) = G(x)^\ell$.

Ścieżka Dycka typu (m, ℓ) *rzędu* n to ciąg długości $mn + \ell$ tak, że każdy element to 1 lub $(1 - m)$, wszystkie sumy częściowe są dodatnie i całkowita suma wynosi ℓ.

Problem 1. Udowodnij, że $H(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu zliczającego ścieżki Dycka typu (m, ℓ) rzędu n.

Problem 2. Wykaż, że dla dowolnego ciągu liczb całkowitych $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, gdzie $x_i \leqslant 1$ dla każdego $i \in [m]$ oraz $\sum_{i \in [m]} x_i = \ell$ istnieje dokładnie ℓ cyklicznych przesunięć ciągu x, w których wszystkie sumy częściowe (prefiksów) są dodatnie.

Problem 3. Udowodnij, że liczba ścieżek Dycka typu (m, ℓ) rzędu n to

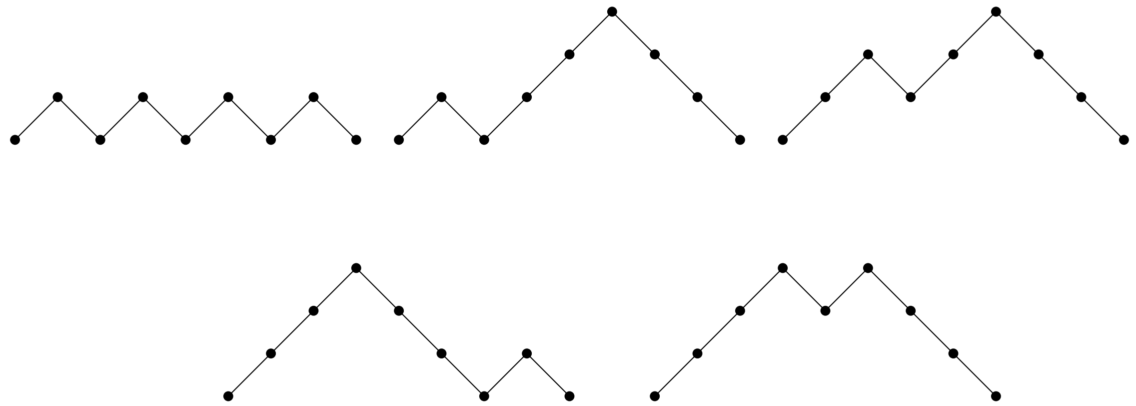
$$\binom{mn + \ell}{n} \frac{\ell}{mn + \ell}.$$

Zauważ, że z powyższego problemu wynika, że liczba drzew 3-arnych na n wierzchołkach to

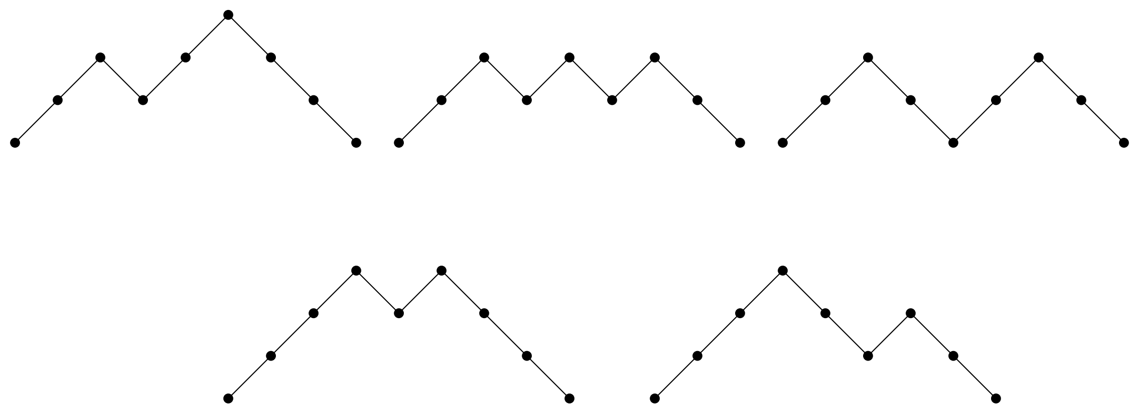
$$\binom{3n + 1}{n} \frac{1}{3n + 1}.$$

Kazdy problem jest warty 0,25 punktu.Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu. Termin: niedziela 14 kwietnia 23:59.

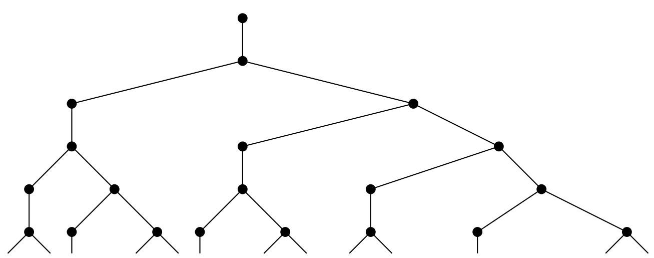
Rysunki



Rysunek 1: Obiekty dla $n = 3$.



Rysunek 2: Obiekty dla $n = 3$.



Rysunek 3: Kilka pierwszych poziomów drzewa Fibonacciego.