Twierdzenia ramseyowskie

Twierdzenie (Ramsey; 1930)**.** Dla dowolnych $p, k, \ell_1, \ldots, \ell_k \in \mathbb{N}_1$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego kolorowania $c : \binom{[N]}{p} \to [k]$ istnieje $X \subseteq [N]$ oraz $\alpha \in [k]$ takie, że

$$|X| = \ell_\alpha \quad \text{oraz} \quad \binom{X}{p} \subseteq c^{-1}(\alpha).$$

Najmniejszą liczbę N spełniającą powyższe nazywamy $R^{(p)}(k; \ell_1, \ldots, \ell_k)$.

Twierdzenie (Schur; 1916)**.** Dla każdego $k \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ o tej własności, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x, y, z \in [N]$ takie, że $c(x) = c(y) = c(z)$ oraz $x + y = z$. Najmniejszą liczbę N spełniającą powyższe nazywamy $S(k)$.

Twierdzenie (Erdős-Szekeres; 1935)**.** Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych N punktów na płaszczyźnie pewne n spośród nich tworzy wielokąt wypukły. Najmniejszą liczbę N spełniającą powyższe nazywamy $\mathrm{ES}(n)$.

Twierdzenie. Dla dowolnych $k, \ell \in \mathbb{N}_2$, zbiór punktów na płaszczyźnie bez k-kubka i ℓ-czapki ma rozmiar co najwyżej

$$f(k, \ell) = \binom{k + \ell - 4}{k - 2}.$$

Twierdzenie (Hales-Jewett; 1963)**.** Dla dowolnych $m, k \in \mathbb{N}_1$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ o tej własności, że dla każdego kolorowania $C : [m]^N \to [k]$ istnieje monochromatyczna kombinatoryczna linia. Najmniejszą liczbę N spełniającą powyższe nazywamy $\mathrm{HJ}(m, k)$.

Twierdzenie (van der Waerden; 1927)**.** Dla dowolnych $m, k \in \mathbb{N}_1$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ o tej własności, że dla każdego kolorowania $C : [N] \to [k]$ istnieje monochromatyczny arytmetyczny ciąg długości m zawarty w $[N]$.

Drzewo binarne to drzewo w którym stopień każdego wierzchołka jest $\leqslant 3$. *Ukorzenione drzewo binarne* to drzewo binarne, w którym wyróżniono jeden z wierzchołków, zwany *korzeniem* stopnia co najwyżej 2. Dodatkowo dla każdego wierzchołka rozróżniamy jego sąsiadów tak, że jedyny sąsiad na ścieżce do korzenia to *rodzic* (korzeń nie ma rodzica); pozostali sąsiedzi są opcjonalni i są to: *lewe dziecko* i *prawe dziecko*. Zauważ, że wierzchołki ukorzenionego drzewa binarnego są w oczywistej bijekcji ze zbiorem ciągów binarnych domkniętym na relację prefiksu (korzeń wtedy odpowiada ciągowi pustemu).

Kompletne drzewo binarne rzędu n, które oznaczamy T_n, to drzewo odpowiadające wszystkim ciągom binarnym długości co najwyżej n. Zatem T_0 to pojedynczy wierzchołek, a T_1 ma trzy wierzchołki.

Mówimy, że $x \leqslant y$ w drzewie binarnym T jeśli x jest na ścieżce z y do korzenia T.

Dla drzew binarnych R, S, T mówimy, że R jest *kopią* S w T jeśli $V(R) \subseteq V(T)$ oraz istnieje funkcja $f : S \to R$ taka, że

(i) f jest izomorfizmem, a zatem jest bijekcją i $x \leqslant y$ w S wtedy i tylko wtedy gdy $f(x) \leqslant f(y)$ w T;
(ii) dla dowolnych $x, y \in S$ takich, że $x < y$ w S zachodzi: y jest w lewym poddrzewie x w S wtedy i tylko wtedy, gdy $f(y)$ jest w lewym poddrzewie $f(x)$ w T.

Zadania

Zadanie 1. Wykaż, że dla każdego kolorowania płaszczyzny $k \in \mathbb{N}_1$ kolorami oraz dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_1$ istnieje n lini poziomych oraz n linii pionowych o tej własności, że zbiór punktów leżących na przecięciu tych linii jest monochromatyczny.

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że każde N punktów na płaszczyźnie zawiera n punktów w pozycji ogólnej lub n punktów leżących na jednej prostej.

Zadanie 3. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Wykaż, że dowolny zbiór $N \geqslant R^{(3)}(n,n)$ punktów na płaszczyźnie (pozycja ogólna) zawiera n punktów w pozycji wypukłej.

Uwaga: Będzie to jeszcze jeden dowód twierdzenia Erdősa-Szekeresa.

Zadanie 4. Wykaż, że $2^k < R^{(2)}(k; 3, 3, \ldots, 3) \leqslant 3k!$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_2$.

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego k-kolorowania wierzchołków T_N istnieje monochromatyczna kopia drzewa T_n w T_N.

Zadanie 6. Wykaż, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego kolorowania $c : 2^{[N]} \to [k]$ istnieją dwa niepuste, rozłączne zbiory $X, Y \subset [N]$ takie, że

$$\text{zbiory } X,\ Y \text{ oraz } X \cup Y \text{ mają ten sam kolor.}$$

Zadanie 7 (wzmocnienie twierdzenia Schura)**.** Wykaż, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x, y, z \in [N]$ takie, że

$$c(x) = c(y) = c(z) \quad \text{oraz} \quad x \neq y \quad \text{oraz} \quad x + y = z.$$

Zadanie 8. Dla $t \in \mathbb{N}_3$ niech $L(t)$ będzie równaniem $x_1 + \cdots + x_{t-1} = x_t$. Wykaż, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$ i dla dowolnego $t \in \mathbb{N}_3$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieje monochromatyczne rozwiązanie $L(t)$.

Zadanie 9. Wykaż, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnej liczby pierwszej p takiej, że $p > N$ równanie

$$x^k + y^k = z^k \mod p$$

ma nietrywialne rozwiązanie w liczbach całkowitych, czyli takie, że p nie dzieli $x \cdot y \cdot z$.

Uwaga: Czyli Wielkie twierdzenie Fermata nie byłoby prawdziwe gdyby równość obłożyć kongruencją.

Zadanie 10. Wykaż, że $S(k) = \Omega(3^k)$.

Zadanie 11. Wykaż, że $\{1, \ldots, \frac{1}{2}(3^n + 1)\}$ zawiera podzbiór mocy 2^n bez ciągu arytmetycznego długości 3.

Zadanie 12. Wykaż, że dla każdego $k, \ell \in \mathbb{N}_2$

$$\binom{k+\ell-4}{k-2} \leqslant f(k, \ell).$$

Zadanie 13. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{ES}(n) \leqslant f(n-1, n) + 1 = \binom{2n-5}{n-2} + 2.$$

Wskazówka: Rozważ zbiór X wielkości $f(k, \ell)$ i jego najwyższy punkt. Wykaż, że ten punkt tworzy zbiór wypukły wielkości $k+1$ z k-kubkiem w X lub istnieje ℓ-czapka w X.

Dla zbioru X punktów na płaszczyźnie przez $\mathrm{convex}(X)$ rozumiemy zbiór punktów na płaszczyźnie zamkniętych w otoczce wypukłej X.

Zadanie 14. Niech X będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie. Podzbiór $Y \subseteq X$ jest *k-dziurą* jeśli $|Y| = k$, Y jest wypukły i $\mathrm{convex}(Y) \cap X = Y$. Wykaż, że wystarczająco duże zbiory punktów na płaszczyźnie mają 5-dziurę.

Zadanie 15. Udowodnij, że dla każdego skończonego zbioru $S \subset \mathbb{N}$ i dla każdego k-kolorowania $\mathbb{N}$ istnieje $a \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \mathbb{N}_1$ takie, że zbiór $a + \lambda S = \{a + \lambda s \mid s \in S\}$ jest monochromatyczny.

Zadanie 16. Niech $m, k \in \mathbb{N}_2$. Udowodnij, że istnieje M wystarczająco duże takie, że zbiór

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i M^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \right\}$$

nie ma ciągu długości $m+1$, ale dla każdego k-kolorowania zbioru S istnieje monochormatyczny ciąg arytmetyczny długości m.

Ciekawostka. Dwuosobowa gra (n, k)-van der Waerdena dla $n, k \in \mathbb{N}_1$ to: Gra pomiędzy graczem A i graczem B, którzy naprzemiennie wybierają liczby ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Gracz A rozpoczyna. Gracze nie mogą wziąć wcześniej wziętej liczby. Wygrywa pierwsza osoba, która wśród swoich liczb posiada ciąg arytmetyczny długości k.

Wykaż, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że gracz A ma strategię wygrywającą w (N, k)-grze.

Zadanie bonusowe do spisania

Problem 1. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych $n, k \in \mathbb{N}_1$ istnieje liczba naturalna $N \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego k-kolorowania liczb ze zbioru $\{1, \ldots, N\}$ istnieją liczby $a \in \mathbb{N}_1$ oraz $r \in \mathbb{N}_1$ takie, że

$$a,\ a + r,\ a + 2r, \ldots,\ a + (m-1)r \text{ oraz } r$$

mają ten sam kolor.

Problem 2. Wykaż, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}_1$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego k-kolorowania kopii T_1 w T_N istnieje kopia R drzewa T_n w T_N taka, że każda kopia T_1 w R ma ten sam kolor.

Kazdy problem jest warty 0,5 punktu. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu. Termin: niedziela 12 maja 23:59.