THEORETICAL COMPUTER SCIENCE Jagiellonian University

Wstęp do teorii grafów

Maksymalny stopień grafu G oznaczamy $\Delta(G)$, *minimalny stopień* w grafie G oznaczamy $\delta(G)$ i *średni stopień* w grafie G oznaczamy $d(G)$.

Graf jest *regularny* jeśli każdy wierzchołek w tym grafie ma ten sam stopień.

Długość ścieżki w grafie to liczba jej krawędzi.

Cykl C grafu G jest cyklem *Hamiltona* jeżeli C przechodzi dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek grafu G.

Zamknięty spacer C grafu G jest cyklem *Eulera* jeżeli C przechodzi dokładnie jeden raz przez każdą krawędź grafu G.

W drzewie, wierzchołki stopnia 1 nazywamy *liśćmi*, natomiast wszystkie pozostałe to *wierzchołki wewnętrzne*.

Zadania

Zadanie 1. Udowodnij, że każde drzewo niezawierające wierzchołków stopnia 2 ma więcej liści niż wierzchołków wewnętrznych.

Zadanie 2. Załóżmy, że T jest drzewem oraz $\phi : V(T) \to V(T)$ jest funkcją spełniającą warunek:

$$\text{jeżeli } x, y \in E(T) \text{ to } \phi(x) = \phi(y) \text{ lub } \phi(x), \phi(y) \in E(T).$$

Wykaż, że istnieje wierzchołek $v \in V(T)$ taki, że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $x, y \in E$ taka, że $\phi(x, y) = x, y$.

Zadanie 3. Niech T będzie drzewem i niech $\mathcal{T}$ będzie dowolnym podzbiorem poddrzew drzewa T. Pokaż, że

(i) jeśli każde dwa drzewa w $\mathcal{T}$ mają niepuste przecięcie (wierzchołkowo) to istnieje wierzchołek należący do wszystkich drzew w $\mathcal{T}$;
(ii) dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_1$ zachodzi: $\mathcal{T}$ zawiera k rozłącznych wierzchołkowo drzew albo istnieje zbiór co najwyżej $k-1$ wierzchołków drzewa T przecinający niepusto każde drzewo w $\mathcal{T}$.

Zadanie 4. Niech $n \in \mathbb{N}_1$ i niech $A_1, \ldots, A_n$ będą parami różnymi podzbiorami $[n]$. Udowodnij, że istnieje $x \in [n]$ takie, że $A_1 \backslash \{x\}, \ldots, A_n \backslash \{x\}$ są parami różne.

Zadanie 5. Ścieżka w grafie jest *najdłuższa* jeśli nie istnieje dłuższa ścieżka. Czy prawdą jest, że:

(i) dowolne dwie najdłuższe ścieżki w grafie spójnym G mają niepuste przecięcie,
(ii) przecięcie wszystkich najdłuższych ścieżek w drzewie T jest niepuste?

Zadanie 6. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Rozważ następujący graf. Zbiorem wierzchołków są wszystkie pola szachownicy $n \times n$, a dwa pola są połączone krawędzią, jeśli z jednego na drugie można wykonać jeden ruch konika szachowego. Dla jakich n,

(i) ten graf jest dwudzielny,
(ii) ten graf zawiera cykl Eulera?

Zadanie 7. Niech $d \in \mathbb{N}$ i niech G_d będzie grafem na zbiorze wierzchołków $\{0,1\}^d$, gdzie dwa ciągi są połączone krawędzią jeśli różnią się na dokładnie jednej pozycji. Dla grafu G_d wyznacz:

(i) liczbę krawędzi,
(ii) średnicę, (maksymalną długość najkrótszej ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami)
(iii) talię (najmniejszy rozmiar cyklu),
(iv) obwód (największy rozmiar cyklu).

Dla jakich d, G_d ma

(v) cykl Hamiltona,
(vi) cykl Eulera?

Zadanie 8. Niech $k \in \mathbb{N}_1$ i niech G będzie grafem. Załóżmy, że $u, v \in V(G)$ leżą na pewnym cyklu w G i istnieje między nimi ścieżka długości co najmniej k w G. Udowodnij, że G ma cykl o długości co najmniej $\sqrt{k}$.

Zadanie 9. Wykaż, że każdy spójny graf G zawiera ścieżkę długości co najmniej

$$\min\{2\delta(G), |V(G)| - 1\}.$$

Zadanie 10. Niech G będzie grafem na $n \in \mathbb{N}_4$ wierzchołkach niemającym wierzchołka stopnia $n-1$. Załóżmy, że dla każdych dwóch różnych $u, v \in V(G)$ istnieje dokładnie jeden wspólny sąsiad u i v w G.

(i) Udowodnij, że dla wszystkich różnych i niesąsiadujących $x, y \in V(G)$, $\deg(x) = \deg(y)$.
(ii) Udowodnij, że G jest regularny.

Zadanie 11. Niech G będzie grafem o $n \in \mathbb{N}_3$ wierzchołkach. Pokaż, że jeżeli $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$ dla dowolnych różnych i niesąsiadujących $u, v \in V(G)$, to G posiada cykl Hamiltona.

Zadanie 12. Niech G będzie grafem o $n \in \mathbb{N}_3$ wierzchołkach i niech $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ będzie ciągiem stopni G. Wykaż, że jeśli dla każdego (całkowitego) i takiego, że $1 \leqslant i < n/2$ mamy $d_i \geqslant i+1$, to G ma cykl Hamiltona.

Zadanie 13. Niech G będzie grafem w którym każdy wierzchołek ma nieparzysty stopień. Wykaż, że jeśli G ma cykl Hamiltona, to G ma trzy różne cykle Hamiltona.

Wskazówka. Wykaż, że jeśli G jest grafem w którym każdy wierzchołek ma nieparzysty stopień, to każda krawędź G leży na parzystej liczbie cykli Hamiltona.

Wskazówka do wzkazówki. Niech $e = xy$ będzie krawędzią G. Podgraf H grafu G jest (G, e)-*lizakiem*, jeśli $V(H) = V(G)$, $e \in E(H)$, oraz jeden z następujących warunków zachodzi: (1) H jest cyklem; (2) $\deg_H(x) = 1$, H ma dokładnie jeden wierzchołek stopnia 3, oraz wszystkie pozostałe wierzchołki H mają stopień dwa. Patrz Rysunek 1.

Jeśli H jest (G, e)-lizakiem spełniającym (1), to *ogonem* H nazywamy unikalną krawędź w H przyległą do x i różną od e. Jeśli H jest (G, e)-lizakiem spełniającym (2), to H ma dwa *ogony* i są to dwie krawędzie H leżące na cyklu w H i przyległe do wierzchołka o stopniu 3 w H.

Rozważ pomocniczy graf na (G, e)-lizakach, w którym dwa (G, e)-lizaki H_1, H_2 sąsiadują jeśli istnieją e_1 ogon H_1 i e_2 ogon H_2 takie, że $H_1 - e_1 = H_2 - e_2$.

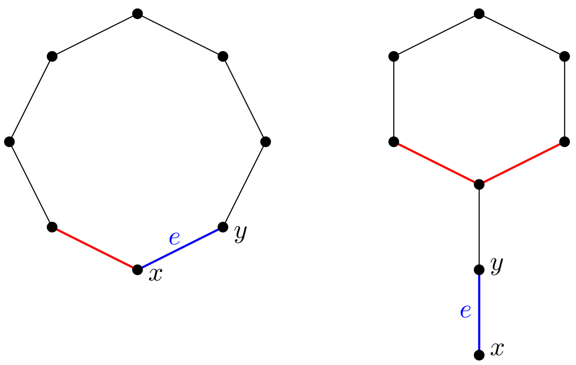
Wykaż, że (G, e)-lizaki o nieparzystym stopniu w pomocniczym grafie to dokładnie te (G, e)-lizaki, które są cyklami.

Zadanie 14. Wykaż, że każdy graf H ma podgraf dwudzielny H taki, że $|E(H)| \geqslant \frac{1}{2}|E(G)|$.

Zadanie 15. Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ i niech $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + 1$. Pokaż, że $V(G)$ można podzielić na dwie części X_1 i X_2 takie, że $\Delta(G[X_1]) \leqslant \Delta_1$ i $\Delta(G[X_2]) \leqslant \Delta_2$.

Zadanie 16. Niech dla grafu G, $\varepsilon(G) = |E(G)|/|V(G)|$. Wykaż, że dla każdy graf G ma podgraf H taki, że $\delta(H) > \varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$.

Zadanie 17. Znajdź funkcję f taką, że dla każdego $k \in \mathbb{N}_1$ i dla każdego grafu G, jeśli $d(G) \geqslant f(k)$ to G zawiera podgraf dwudzielny H taki, że $\delta(H) \geqslant k$.



Rysunek 1: Czerwone krawędzie to ogony lizaków.