Jędrzej Hodor
Piotr Micek

Skojarzenia, spójność i przepływy

Zbiór $M \subset E$ jest *skojarzeniem* w grafie dwudzielnym $G = (X, Y, E)$ jeżeli żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca. Skojarzenie $M \subset E$ jest *doskonałe* jeżeli każdy wierzchołek z $X \cup Y$ jest końcem jakiejś krawędzi z M.

Graf G jest *k-spójny* jeżeli $|V(G)| > k$ oraz po usunięciu dowolnych $k-1$ wierzchołków graf G pozostaje spójny.

Graf G jest *krawędziowo k-spójny* jeżeli po usunięciu dowolnych $k-1$ krawędzi graf G pozostaje spójny.

Zbiór krawędzi grafu G nazywamy *st-przekrojem* jeżeli po usunięciu krawędzi z tego zbioru wierzchołki s oraz t znajdują się w dwóch różnych składowych spójnych. *Minimalnym st-przekrojem* w grafie ważonym (krawędzie mają wagi dodatnie) nazywamy st-przekrój o minimalnej sumie wag krawędzi tego przekroju.

Siecią przepływową nazywamy piątkę (V, E, s, t, c), gdzie:

* V jest zbiorem wierzchołków sieci,
* $s, t \in V$ są dwoma wyszczególnionymi wierzchołkami sieci, zwanymi odpowiednio *źródłem* oraz *ujściem*,
* $E \subset V \times V$ jest zbiorem skierowanych krawędzi sieci; wszystkie krawędzie mające koniec w s są skierowane w kierunku „od s”, wszystkie krawędzie mające koniec w t są skierowane „do t”,
* $c : E \to \mathbb{N}$ jest funkcją przepustowości.

Funkcję $f : E \to \mathbb{N}$ nazywamy *przepływem* w sieci (V, E, s, t, c) jeżeli zachowane są warunki:

* $f(x, y) \leqslant c(x, y)$ dla każdej krawędzi $(x, y) \in E$ (warunek przepustowości),
* dla każdego wierzchołka $v \in V$, $v \neq s$, $v \neq t$ zachodzi

$$\sum_{(x,v)\in E} f(x, v) = \sum_{(v,y)\in E} f(v, y) \text{ (warunek zachowania przepływu)}$$

Wartość funkcji przepływu $\mathrm{val}(f)$ definiujemy jako $\sum_{(s,x)\in E} f(s, x)$. *Przepływem maksymalnym* nazywamy przepływ o maksymalnej wartości.

Przekrojem w sieci przepływowej (V, E, s, t, c) nazywamy dowolną parę (S, T) spełniającą warunki $S \cup T = V$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$.

Dla ustalonego przekroju (S, T) w sieci (V, E, s, t, c) i funkcji przepływu f, przez

* $c(S,T)$ oznaczamy *przepustowość* przekroju (S,T), którą definiujemy

$$c(S,T) = \sum\{c(x,y):\ (x,y) \in E,\ x \in S,\ y \in T\},$$

* $f(S,T)$ oznaczamy *przepływ* między S i T, który definiujemy

$$f(S,T) = \sum\{f(x,y):\ (x,y) \in E,\ x \in S,\ y \in T\} - \sum\{f(y,x):\ (y,x) \in E,\ x \in S,\ y \in T\}.$$

Ciąg $(s = v_0, v_1, \dots, v_k)$ nazywamy *ścieżką powiększającą* od s do v_k jeżeli dla dowolnego $i = 0, \dots, k-1$ mamy, albo $(v_i, v_{i+1}) \in E$ i $f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$ albo $(v_{i+1}, v_i) \in E$ i $f(v_{i+1}, v_i) > 0$.

Zadania

Zadanie 1. Niech $k \in \mathbb{N}_1$ i niech G będzie k-regularnym grafem dwudzielnym. Wykaż, że krawędzie G można podzielić na k skojarzeń doskonałych.

Zadanie 2. Niech k będzie parzystą i dodatnią liczbą naturalną. Niech G będzie grafem k-regularnym. Wykaż, że istnieje $H \subseteq G$ taki, że $V(H) = V(G)$ i H jest sumą rozłącznych cykli.

Zadanie 3. Krawędź $e = ab$ w grafie G jest *mostem*, jeśli a i b są w różnych spójnych składowych $G - e$. Niech G będzie grafem 3-regularnym bez mostów. Wykaż, że G ma skojarzenie doskonałe.

Zadanie 4. Rozważ następujący „oczywisty" algorytm konstruujący stabilne skojarzenie w grafie dwudzielnym. Rozpocznij od dowolnego skojarzenia. Jeśli aktualne skojarzenie nie jest maksymalne, to dodaj niekolidującą krawędź. Jeśli aktualne skojarzenie jest maksymalne ale nie jest stabilne, to dodaj krawędź tworzącą niestabilność i usuń wszystkie przyległe do niej krawędzie w skojarzeniu. Wykaż, że ten algorytm nie musi się zatrzymać.

Zadanie 5. Niech G będzie grafem i $k \in \mathbb{N}_1$. Wykaż, że G zawiera skojarzenie liczności k wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subseteq V(G)$ zachodzi $\mathrm{odd}(G - S) \leqslant |S| + |V(G)| - 2k$.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli G ma dwa rozłączne krawędziowo drzewa rozpinające, to G zawiera spójny podgraf rozpinający, którego wszystkie wierzchołki mają parzysty stopień.

Zadanie 7. Załóżmy, że (S_1, T_1) oraz (S_2, T_2) są dwoma przekrojami o minimalnej przepustowości w sieci (V, E, s, t, c). Czy

* $(S_1 \cup S_2, V \setminus (S_1 \cup S_2))$,
* $(S_1 \cap S_2, V \setminus (S_1 \cap S_2))$

są przekrojami o minimalnej przepustowości?

Zadanie 8. Podaj przykład sieci przepływowej dla której algorytm Forda-Fulkersona wyznaczania maksymalnego przepływu może działać w czasie, który nie jest zależny od rozmiaru sieci (a zależy od funkcji przepustowości). Opisz które ścieżki powiększające są wybierane w kolejnych iteracjach algorytmu.

Zadanie 9. Udowodnij, że

(i) G jest k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami $x, y \in V(G)$ istnieje k wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z x do y,
(ii) G jest krawędziowo k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy pomiędzy dowolnym dwoma wierzchołkami $x, y \in V(G)$ istnieje k krawędziowo rozłącznych ścieżek z x do y.

Zadanie 10. Niech G będzie grafem. Wykaż, że G jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych trzech różnych wierzchołków x, y, z w G istnieje ścieżka z x do z przechodząca przez y w G

Zadanie 11. Wykaż, że dla każdego grafu ważonego G istnieje drzewo T z wagami na krawędziach takie, że $V(T) = V(G)$ oraz: dla każdych dwóch wierzchołków u, v w G, minimalny uv-przekrój jest równy minimalnej wadze krawędzi leżącej na ścieżce od u do v w drzewie T.

Zadanie 12. Niech $(P, \leqslant)$ będzie skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym. Podaj algorytm konstrukcji pokrycia łańcuchowego P o minimalnym rozmiarze poprzez redukcję tego problemu do problemu znajdowania największego skojarzenia w grafie dwudzielnym.

Zadanie 13. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru U i niech r_A dla każdego $A \in \mathcal{A}$ będzie elementem ze zbioru A. Powiemy, że zbiór $\{r_A : A \in \mathcal{A}\}$ *reprezentuje* zbiory z $\mathcal{A}$ jeżeli dla dowolnych dwóch $B, C \in \mathcal{A}$ mamy $r_B \neq r_C$ jeżeli $B \neq C$. Podaj warunek konieczny i wystarczający na to, by rodzina $\mathcal{A}$ miała zbiór reprezentantów.

Zadanie 14. Mamy n czekolad. Każda tabliczka czekolady składa się z t wierszy. Każda czekolada ma napis $s \in \{a, b\}^*$, co oznacza, że każde okienko w j-tej kolumnie zawiera j-tą literę słowa s. Podziałem czekolady nazywamy jej podział na dwie części, lewą i prawą, który spełnia warunek: jeżeli okienko (i, j) z i-tego wiersza i j-tej kolumny jest w części lewej, to również okienka (i, k) dla $k < j$ należą do części lewej. Część lewa jest spójna, gdyż zakładamy że czekolada zawiera lewy oraz prawy brzeg, który zawsze należy do części lewej bądź prawej odpowiednio (część lewa bądź prawa może być pusta, tzn. zawierać tylko brzeg). Mając na wejściu n czekolad: k_1 z napisem s_1, ..., k_p z napisem s_p podaj algorytm testujący, czy da się podzielić każdą z tych czekolad na część lewą i część prawą, tak by dokładnie jedna część lewa pasowała do dokładnie jednej części prawej (pochodzącej z podziału tej samej czekolady). Uwaga: powiemy, że część lewa pasuje do części prawej jeżeli możemy skleić część lewą z częścią prawą i w wyniku powstanie czekolada bez dziur, która w każdej kolumnie ma tę samą literę (może tworzyć napis inny niż s_i dla każdego $i = 1, \ldots, p$).

Zadanie 15. Macierz M rozmiaru $n \times n$ nazywamy kwadratem łacińskim jeżeli każdy wiersz i każda kolumna macierzy zawiera pewną permutację liczb ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

Niech n_1,n_2 będą dwiema liczbami naturalnymi mniejszymi bądź równymi n. Niech M będzie macierzą o rozmiarze $n_1 \times n_2$, której wszystkie pola $M[i][j]$ dla $1 \leqslant i \leqslant n_1$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n_2$ są wypełnione pewnymi liczbami ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ w taki sposób, że wszystkie częściowo wypełnione wiersze i kolumny zawierają różne liczby. Znajdź warunek konieczny i wystarczający na to, aby:

(i) macierz M była rozszerzalna do kwadratu łacińskiego $n \times n$ przy założeniu że $n_1 < n$ oraz $n_2 = n$,

(ii) macierz M była rozszerzalna do kwadratu łacińskiego $n \times n$ przy założeniu że $n_1 < n$ oraz $n_2 < n$.

Zadanie bonusowe do spisania

Problem 1. Niech G będzie grafem, niech $S, T \subseteq V(G)$ i niech $\{S_1, \ldots, S_k\}$ będzie podziałem zbioru S na podzbiory które są spójne w G. Załóżmy ponadto, że istnieją takie rozłączne ścieżki P_1, …, P_k, że P_i jest S_i–T ścieżką (ale być może zawiera więcej niż jeden wierzchołek z S). Niech R będzie zbiorem zawierającym dokładnie jeden wierzchołek z każdego S_i. Wykazać, że istnieje $\lfloor k/2 \rfloor$ rozłącznych R–T ścieżek w G.

Każdy problem jest warty 0,5 punktu. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysłać na adres podany na stronie internetowej kursu. Termin: niedziela 26 maja 23:59.