Jędrzej Hodor
Piotr Micek
Theoretical Computer Science, Jagiellonian University

Kolorowanie grafów

Dla grafu G, przez $\overline{G}$ oznaczamy dopełnienie G.

Liczba chromatyczna grafu G, oznaczana przez $\chi(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje poprawne kolorowanie wierzchołków grafu G używające k kolorów.

Liczba kolorująca grafu G, oznaczana przez $\mathrm{col}(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje uporządkowanie wierzchołków $v_1, \ldots, v_n$ grafu G w którym dla kazdego i wierzchołek v_i ma mniej niż k sąsiadów na lewo.

Listowa liczba chromatyczna grafu G, oznaczana przez $\mathrm{ch}(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że dla każdego przypisania $S : V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$ takiego, że $|S(V)| \leqslant k$ dla każdego $v \in V(G)$ istnieje właściwie kolorowanie c grafu G takie, że $c(v) \in S(v)$ dla każdego $v \in V(G)$.

Graf G jest grafem *zewnętrznie planarnym* jeżeli G ma zanurzenie planarne, w którym wszystkie wierzchołki są przyległe do ściany zewnętrznej.

Graf G jest grafem *permutacji* jeżeli G jest grafem przecięć odcinków rozpiętych na dwóch różnych prostych równoległych (tzn. zawartych pomiędzy tymi prostymi i mającymi z nimi niepuste przecięcie).

Graf $G = (V, E)$ jest grafem *nieporównywalności* jeżeli istnieje częściowy porządek $P = (V, \leqslant)$ spełniający dla każdych $u, v \in V$ warunek:

$$uv \in E \iff u, v \text{ są nieporównywalne w } P.$$

Niech G będzie grafem i σ będzie liniowym porządkiem na $V(G)$. Rozważ algorytm First-Fit kolorowania wierzchołków grafu kolorami z $\mathbb{N}$. Dla wejścia (G, σ) First-Fit koloruje wierzchołki G w kolejności σ w taki sposób, że wierzchołek v otrzymuje najmniejszy kolor, który nie jest już użyty na którymś z jego już pokolorowanych sąsiadów w G.

Średni stopień w grafie G definiujemy jako $\mathrm{ad}(G) = 2|E(G)|/|V(G)|$. *Maksymalny średni stopień* w grafie G definiujemy jako $\mathrm{mad}(G) = \max\{\mathrm{ad}(H) \mid H \subseteq G\}$.

Niech G będzie grafem. Jeśli $uv \in E(G)$ to G *ze skontraktowaną krawędzią* uv nazywamy graf G/uv taki, że $V(G/uv) = V(G) - \{u, v\} \cup \{w\}$ i $E(G/uv) = E(G) - \{ux \mid ux \in E(G)\} - \{vx \mid vx \in E(G)\} \cup \{wx \mid ux \in E(G) \text{ lub } vx \in E(G)\}$.

Zadania

Zadanie 1. Rozpatrzmy graf Q_k w którym wierzchołkami są wszystkie podzbiory $(k-1)$-elementowe zbioru $(2k-1)$-elementowego, zaś pomiędzy dwoma zbiorami istnieje krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentujące je zbiory mają puste przecięcie. Wykaż, że $\chi(Q_k) = 3$ dla każdego $k \geqslant 2$.

Zadanie 2. *Warstwowanie* grafu G to ciąg $(L_0, L_1, \ldots)$ podzbiorów $V(G)$ taki, że (1) $V(G) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$; (2) $L_i \cap L_j = \emptyset$ dla dowolnych $i \neq j$ oraz (3) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $u, v \in L_i \cup L_{i+1}$. Dla przykładu, jeśli G jest spójnym grafem, $v \in V(G)$ i $L_i = \{u \in V(G) \mid \mathrm{dist}_G(u,v) = i\}$ dla $i \in \mathbb{N}$, to $(L_0, L_1, \ldots)$ jest warstwowaniem G.

Niech G będzie grafem i $(L_0, L_1, \ldots)$ będzie warstwowaniem G. Wykaż, że jeśli $\chi(G[L_i]) \leqslant k$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to $\chi(G) \leqslant 2k$.

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdego grafu G mamy

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant |V(G)| + 1.$$

Zadanie 4. Dla $n, k \in \mathbb{N}_2$ z $n \geqslant k$ *uogólniony graf przesunięciowy* $G_{n,k}$ to graf o wierzchołkach $V(G_{n,k}) = \binom{[n]}{k}$. Dwie k-tki $\{x_1 < \cdots < x_k\}$, $\{y_1 < \cdots < y_k\}$ są połączone krawędzią w $G_{n,k}$ jeśli $x_2 = y_1, \ldots, x_k = y_{k-1}$ lub $y_2 = x_1, \ldots, y_k = x_{k-1}$. Wykaż, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_2$, rodzina grafów $\{G_{n,k}\}_{n \geqslant k}$ ma nieograniczoną liczbę chromatyczną.

Zadanie 5. Niech $n, k \in \mathbb{N}_2$ z $n \geqslant k$.

(i) Jakiej długości jest najmniejszy cykl w uogólnionym grafie przesunięciowym $G_{n,k}$?
(ii) Jakiej długości jest najmniejszy cykl nieparzysty w uogólnionym grafie przesunięciowym $G_{n,k}$?

Zadanie 6. Udowodnij, że dla każdego grafu G mamy

$$\mathrm{col}(G) - 1 \leqslant \mathrm{mad}(G) \leqslant 2(\mathrm{col}(G) - 1).$$

Zadanie 7. Wykaż, że następujące zdania są równoważne: dla dowolnego grafu G

(i) $\chi(G) \leqslant k$;
(ii) G ma orientację krawędzi bez ścieżki skierowanej długości k (długość ścieżki to liczba jej krawędzi).

Zadanie 8. Wykaż, że graf G ma orientację krawędzi taką, że każdy wierzchołek ma co najwyżej d krawędzi wychodzących wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{mad}(G) \leqslant 2d$.

Wskazówka: Aby znaleźć wymaganą orientację, warto rozważyć graf dwudzielny, którego jedna część to $E(G)$, a druga to d kopii $V(G)$.

Zadanie 9.

(i) Wykaż, dla każdego grafu G istnieje uporządkowanie wierzchołków dla którego kolorowanie First-Fit używa $\chi(G)$ kolorów.
(ii) Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_2$ istnieje graf dwudzielny i uporządkowanie jego wierzchołków takie, że algorytm First-Fit używa n kolorów.
(iii) Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_2$ istnieje las i uporządkowanie jego wierzchołków takie, że algorytm First-Fit używa n kolorów.

Zadanie 10. Wykaż, że istnieje funkcja f taka, że dla dowolnego grafu przedziałowego G i dowolnego uporządkowania jego wierzchołków algorytm kolorujący First-Fit używa co najwyżej $f(\omega(G))$ kolorów na G.

Jak bardzo potrafisz ograniczyć asymptotykę f? Spróbuj wskazać $f(\omega)$ wielomianowe względem ω. (Istnieje dość prosty argument dla $f(\omega) = \mathcal{O}(\omega^2)$.)

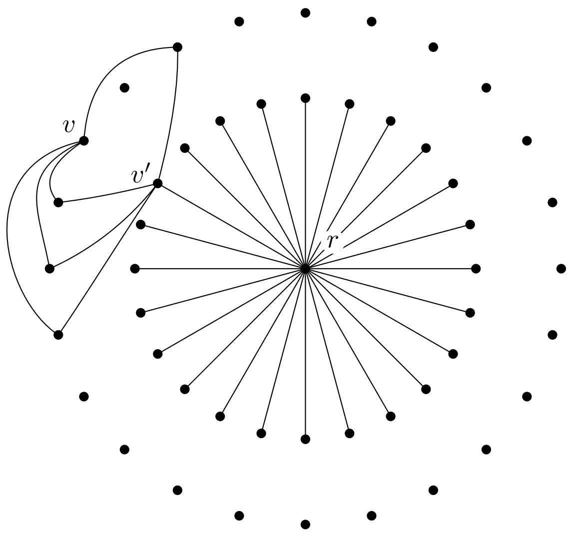
Zadanie 11. Wykaż, że dopełnienie grafu permutacji też jest grafem permutacji.

Zadanie 12. Wykaż, że $\chi(G) = \omega(G)$ dla każdego grafu permutacji G.

Zadanie 13. Udowodnij, że graf jest kografem wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podgraf indukowany H ma następującą własność: każda maksymalna klika w H przecina każdy maksymalny zbiór niezależny w H.

Zadanie 14. Rozważ rodzinę grafów $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ zdefiniowaną jak następuje. Niech G_1 będzie jednowierzchołkowym grafem. Niech G_{n+1} będzie grafem otrzymanym z G_n poprzez dodanie dla każdego wierzchołka $v \in V(G_n)$ kopii tego wierzchołka v' oraz dodanie jednego ekstra wierzchołka r. Zatem $|V(G_{n+1})| = 2 \cdot |V(G_n)| + 1$. Dla dowolnych wierzchołków $x, y \in V(G_{n+1})$ mamy $xy \in E(G_{n+1})$ jeśli (1) $x, y \in V(G_n)$ i $xy \in E(G_n)$ lub (2) $x \in V(G_n)$, $y = v'$ dla pewnego $v \in V(G_n)$ i $xv \in E(G_n)$ lub (3) $x = r$ i $y = v'$ dla pewnego $v \in V(G_n)$. Patrz Rysunek 1.

Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ mamy $\omega(G_n) \leqslant 2$ i $\chi(G_n) \geqslant n$.



Rysunek 1:

Zadanie 15. Wykaż, że klasa grafów przecięć kół na płaszczyźnie jest χ-ograniczona.

Zadanie 16. Rozważmy grafy, których wierzchołki są reprezentowane przez wyrównane do osi prostokąty na płaszczyźnie, a krawędzie przez relację bycia rozłącznym. Udowodnij, że dla takich grafów mamy $\chi(G) \leqslant \mathcal{O}(\omega(G) \log(\omega(G)))$.

Zadanie 17. Niech $t \in \mathbb{N}_1$. Definiujemy *t-przedział* jako podzbiór $\mathbb{R}$, który jest sumą co najwyżej t przedziałów. Niech G będzie grafem przecięć pewnej rodziny t-przedziałów. Wykaż, że $\chi(G) \leqslant 2t(\omega(G) - 1)$.

Zadanie 18. Udowodnij, że w każdym n-wierzchołkowym grafie istnieje indukowana ścieżka P taka, że każdy komponent $G - N[V(P)]$ ma rozmiar co najwyżej $\frac{n}{2}$.

Wskazówka: Przypomnij sobie dowód twierdzenia Gyárfása o χ-ograniczoności grafów P_k-wolnych.

Zadanie 19. Wykaż, że grafy dwudzielne mają dowolnie dużą listową liczbę chromatyczną.

Zadanie 20. Wykaż, że krawędzie każdego grafu planarnego możemy pokolorować trzema kolorami tak, że krawędzie każdego koloru nie zamykają cyklu.

Zadanie 21. Przypomnij sobie, że maksymalny graf planarny to taki, którego każdy jego planarny rysunek jest triangulacją. Takie grafy w skrócie nazywamy triangulacjami. Niech $n \in \mathbb{N}_4$ i niech G będzie n-wierzchołkową triangulacją.

(i) Wykaż, że jeśli e jest krawędzią w G taką, że każdy trójkąt zawierający e jest ścianą, to G/e jest triangulacją.
(ii) Wykaż, że G zawiera co najmniej n krawędzi e takich, że każdy trójkąt zawierający e jest ścianą.
(iii) Wykaż, że G jest grafem 3-spójnym.

Zadanie 22. Niech G będzie grafem planarnym, którego najkrótszy indukowany cykl ma długość g dla pewnego $g \in \mathbb{N}_3$. Udowodnij, że

$$\mathrm{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}.$$

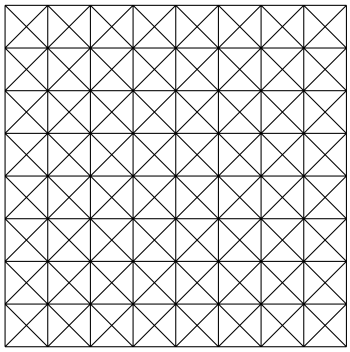
Zadanie 23. Piłka nożna jest oklejona skórzanymi łatami w kształcie sześciokątów lub pięciokątów. Łaty są pozszywane ze sobą w ten sposób, że zbiór wierzchołków będących narożnikiem co najmniej jednego wielokąta wraz z krawędziami wszystkich szwów tworzy graf kubiczny (t.j. 3-regularny). Patrz rysunek 2. Ile pieciokątnych łat ma taka piłka?

Zadanie 24. Wykaż, że następująca definicja bycia minorem jest równoważna tej podanej na wykładzie. H jest minorem G, jeśli można uzyskać graf izomorficzny do H z G poprzez operacje: usunięcia krawędzi, usunięcia wierzchołka i kontrakcje krawędzi.

Zadanie 25. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. *Krata rzędu n* to graf, oznaczany $\boxplus_n$, którego wierzchołkami są elementy $[n] \times [n]$ i dwa wierzchołki (a, b) i (c, d) są połączone krawędzią w $\boxplus_n$, jeśli $a = c$ i $|b-d| = 1$ lub $b = d$ i $|a-c| = 1$. *Wzbogacona krata rzędu n* to graf, oznaczany $\boxtimes_n$, który jest nadgrafem $\boxplus_n$ z dodanymi krawędziami postaci $(a, b)(c, d)$, gdzie $|a - c| = 1$ i $|b - d| = 1$. Patrz rysunek 3.

(i) Wykaż, że dla każdego grafu planarnego G istnieje $n \in \mathbb{N}_1$ takie, że G jest minorem $\boxplus_n$.

Rysunek 2:



Rysunek 3:

(ii) Wykaż, że dla każdego grafu G istnieje $n \in \mathbb{N}_1$ takie, że G jest minorem $\boxtimes_n$.

Zadanie 26. Udowodnij, że graf jest zewnętrznie planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma K_4 i $K_{2,3}$ jako minoru.

Zadania bonusowe do spisania

Problem 1. Wykaż, że dla każdego drzewa T istnieje stała c_T taka, że First-Fit wykorzystuje co najwyżej c_T kolorów na lasach niezawierających T jako podgrafu indukowanego.

Problem 2. Niech $t \in \mathbb{N}_1$. Rozważ rodzinę równoległych i rozłącznych linii: $\ell_1, \ldots, \ell_t$. Definujemy $t^\star$-*przedział* jako zbiór będący sumą t przedziałów, po jednym z każdej linii ℓ_i dla $i \in [t]$. Wykaż, że istnieje $f(t)$ takie, że dla każdej rodziny parami przecinających się $t^\star$-przedziałów $\mathcal{F}$ istnieje podbiór X co najwyżej $f(t)$ punktów na liniach $\ell_1, \ldots, \ell_t$ taki, że $F \cap X \neq \emptyset$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$.

Kazdy problem jest warty 0,375 punktu. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu. Termin: niedziela 9 czerwca 23:59.