

Lista pytań egzaminacyjnych

Pytanie 1. Współczynniki dwumianowe. Podstawowe tożsamości, wzory rekurencyjne, interpretacje. Na ile sposobów możemy włożyć n obiektów do k szuflad (12 wariantów tego pytania)?

Pytanie 2. Liczby Stirlinga. Podstawowe tożsamości, wzory rekurencyjne, interpretacje. Zasada włączeń i wyłączeń.

Pytanie 3. Liczby Catalana. Wyprowadzenie zwartej postaci. Zliczanie: słów Dycka, triangulacji wielokąta wypukłego, drzew binarnych, pełnych drzew binarnych, drzew narysowanych, nawiasowań ciągu symboli.

Pytanie 4. Algorytm Euklidesa. Tożsamość Bézouta. Fundamentalne twierdzenie arytmetyki. Chińskie twierdzenie o resztach. Funkcja Eulera i twierdzenie Eulera. Małe twierdzenie Fermata. Multiplikatywność funkcji Eulera i jej konsekwencje.

Pytanie 5. Funkcje tworzące. Definicja. Rozwinięcie w szereg $\frac{1}{(1-ax^k)^m}$. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wyprowadzić funkcję tworzącą ciągów: $(0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)$, (a_k, a_{k+1}, \dots) , $(\sum_{n=0}^k a_n)_{k \in \mathbb{N}}$. Uogólnione współczynniki dwumianowe. Funkcja tworząca ciąg Fibonacciego i wyprowadzenie z niej wzoru zwartego na liczby Fibonacciego.

Pytanie 6. Twierdzenie o wielomianie charakterystycznym ciągu zadanego rekurencyjnie. Przykładowa aplikacja. Funkcja tworzącą liczb Catalana i wyprowadzenie z niej wzoru zwartego na liczby Catalana. Twierdzenie o funkcji rzeczywistej odpowiadającej funkcji tworzącej i przykład zastosowania.

Pytanie 7. Podział liczby, diagram Ferrersa. Twierdzenie o równoliczności podziałów na parami różne składniki i podziałów na nieparzyste składniki (dowód przez bijekcję i dowód przy pomocy funkcji tworzących). Jak szybko policzyć liczbę podziałów liczby n ? Twierdzenie Eulera o podziałach.

Pytanie 8. Posety. Twierdzenie dualne do twierdzenia Dilwortha. Lemat Erdősa-Szekeresza. Twierdzenie Dilwortha.

Pytanie 9. Krata boolowska. Twierdzenie Spernera. Nierówność Lubella–Yamamoto–Meshalkina. Dowód twierdzenia Spernera przez podział kraty na łańcuchy symetryczne. Rekurencyjna konstrukcja takiego podziału.

Pytanie 10. Konstrukcja podziału kraty na łańcuchy symetryczne przez nawiasowania. Liczby Dedekinda. Ograniczenie górne na liczby Dedekinda: $\mathcal{O}\left(3^{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}\right)$.

Pytanie 11. Cienie zbiorów w kracie boolowskiej. Dowód twierdzenia Spernera przy pomocy cieni zbiorów. Twierdzenie Erdősa–Ko–Rado.

Pytanie 12. k -kaskadowa reprezentacja liczb naturalnych. Dowód istnienia unikalnej reprezentacji. Twierdzenie Kruskala–Katony (bez dowodu). Konstrukcja świadcząca, że ograniczenie w twierdzeniu Kruskala–Katony jest najlepsze możliwe. Twierdzenie Lovásza (bez dowodu).

Pytanie 13 (★). Dowód twierdzenia Lovásza.

Pytanie 14. Twierdzenie Ramseya. Ograniczenie dolne na liczby Ramseya (twierdzenie Erdős'a). Ograniczenie górne na liczby $R(s, t)$ (twierdzenie Erdős'a-Szekeres'a)

Pytanie 15. Twierdzenie Schura. Problem o szczęśliwym zakończeniu i twierdzenie Erdős'a-Szekeres'a. Twierdzenie Halesa-Jewetta (bez dowodu) i wyprowadzenie z niego twierdzenia van der Waerdena.

Pytanie 16 (★). Dowód twierdzenia Halesa-Jewetta.

Pytanie 17. Ciągi grafowe i algorytm ich rozpoznawania. Cykl Eulera oraz warunek konieczny i wystarczający dla grafu na zawieranie cyklu Eulera. Twierdzenie Diraca, czyli warunek wystarczający dla grafu na posiadanie cyklu Hamiltona.

Pytanie 18. Grafy dwudzielne. Twierdzenie Königa. Twierdzenie Halla. Twierdzenie o stabilnym skojarzeniu (Gale'a-Shapleya).

Pytanie 19. Twierdzenie Tutte'a charakteryzujące grafy zawierające skojarzenie doskonałe.

Pytanie 20. Twierdzenie Mengersa. Wykaż, że G jest k -spójny wtedy i tylko wtedy, gdy pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami $x, y \in V(G)$ istnieje k wewnętrznie wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z x do y (ćwiczenie 10.9.(i)).

Pytanie 21. Sieci przepływowe i przepływy. Twierdzenie Forda-Fulkersona.

Pytanie 22. Liczba chromatyczna. Liczba kolorująca. Efektywny algorytm wyznaczający liczbę kolorującą. Twierdzenie Brooksa.

Pytanie 23. Konstrukcje grafów bez trójkątów o dowolnie dużej liczbie chromatycznej. Konstrukcja Zykowa. Konstrukcja Tutte'a. Grafy przesunięciowe (ang. shift graphs).

Pytanie 24. Grafy doskonałe. Grafy przedziałowe. Grafy porównywalności.

Pytanie 25. Twierdzenie o grafach P_4 -wolnych i kografach.

Pytanie 26. χ -ograniczone klasy grafów. Twierdzenie Gyárfása o grafach bez długiej ścieżki jako podgrafu indukowanego.

Pytanie 27. χ -ograniczone klasy grafów. Grafy przecięć prostokątów na płaszczyźnie o bokach równoległych do osi.

Pytanie 28. Planarność. Twierdzenie Jordana dla wielokątów. Grafy płaskie. Formuła Eulera i lematy ją poprzedzające. Wykaż, że K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne. Twierdzenie Whitneya (bez dowodu). Triangulacje jako maksymalne grafy planarne.

Pytanie 29. Minor w grafie. Twierdzenie Wagnera-Kuratowskiego (bez dowodu). Kolorowanie grafów planarnych. Minimalny stopień ≤ 5 . Dowód 5-kolorowalności przez łańcuchy Kempego. Twierdzenie o czterech barwach (wypowiedź i trochę historii). Uogólnienia i pokrewne twierdzenia. Hipoteza Hadwiger'a.

Pytanie 30. Kolorowania z list. Twierdzenie Thomassena o listowej liczbie chromatycznej grafów planarnych.

Pytanie 31. Twierdzenie Turána o ekstremalnych grafach bez ustalonej wielkości klikli. Twierdzenie Erdős-Stone'a (bez dowodu) i wniosek z niego.

Pytanie 32. Duży średni stopień wymusza dużą klikę jako minor. Twierdzenie Thomassena o tym, że minimalny stopień co najmniej 3 i duża talia wymusza dużą klikę jako minor.