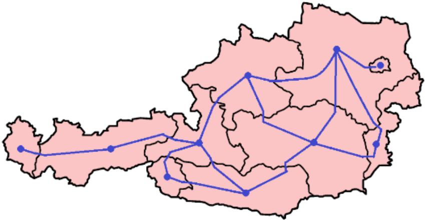
PLANARNOŚĆ

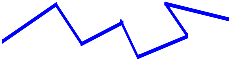


„Graf jest planarny jeśli da się go narysować na płaszczyźnie bez przecinania krawędzi"

1. Wielolinie i wielokąty

segment :

wielolinia :



skończona suma segmentów

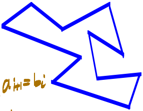
$$S_i = [a_i, b_i]$$

$$i = 1 \ldots k$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}^2$$

$$S_i \cap S_j = \begin{cases} \{b_i\} \ \overset{a_{i+1}=b_i}{} & , j = i+1 \\ \emptyset & , \text{w.p.p.} \end{cases}$$

wielokąt :



—||—

$$S_i \cap S_j = \begin{cases} \{b_i\} \ \overset{a_{i+1}=b_i}{} & , j = i+1 \\ \{a_1\} \ \overset{a_1=b_k}{} & , i = 1, j = k \\ \emptyset & , \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otwarty.

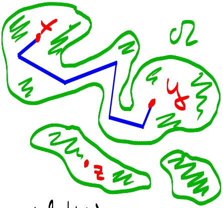
$\sim \, = \, \sim_\Omega$

$x \sim y$ jeśli istnieje wielolinia w Ω łącząca x i y.

Fakt ~ to relacja równoważności.

Jeśli $\forall x,y \in \Omega$ mamy $x \sim y$

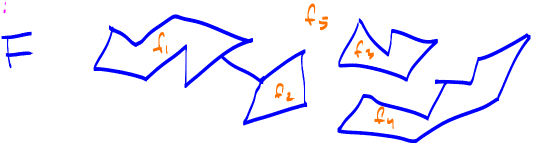
to Ω jest wieloliniowo spójny.



Jeśli $F \subset \mathbb{R}^2$ domknięty (suma sk. wielu wielok.)

to komponenty $\mathbb{R}^2 \setminus F$ nazywamy ścianami.

Przykład:



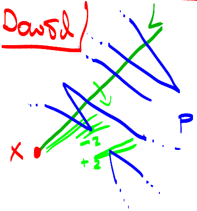
f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 ściany F

Twierdzenie (Jordana dla wielokątów)

Każdy wielokąt P ma dokładnie dwie ściany: ograniczoną i nieograniczoną.

Dodatkowo brzegiem każdej ze ścian jest P.

Dowód

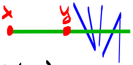


$x \in \mathbb{R}^2 \setminus P$, L - półprosta z x

$\pi(x, L) = \left(\# \begin{matrix} \text{segmentów z } P \\ \text{które przecina } L \end{matrix}\right) \bmod 2$

- $\pi(x, L) = \pi(x, L')$

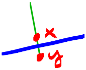
$\pi(x) := \pi(x, L)$



- $x \sim y$ w $\mathbb{R}^2 \setminus P \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$

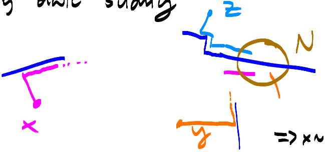
$\Rightarrow \pi$ stałe na każdej ścianie P.

- są co najmniej dwie ściany



$\Rightarrow \pi(x) \neq \pi(y)$

- są co najwyżej dwie ściany



$\Rightarrow x \sim y$

dwa z punktów są na tej samej ścianie

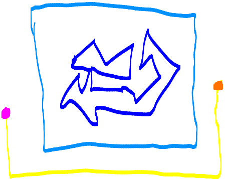
$\Rightarrow$ są dwie ściany (z brzegiem P)

- jedna jest nieograniczona

ściana zawierająca ten punkt

- jedna jest ograniczona

jeśli obie to można połączyć

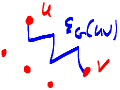


Fakt F ograniczony to F ma dokładnie jedną nieograniczoną ścianę

⊠

2. Grafy płaskie

Def $(G,\mathcal{E}_G)$ jest grafem płaskim jeśli (plane graph)



1) $V(G) \subset \mathbb{R}^2$ i 2) $\mathcal{E}_G : E(G) \to 2^{\mathbb{R}^2}$ t. że

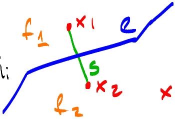
- $\forall e=uv \in E(G)$: $\mathcal{E}_G(e) = A \setminus \{u,v\}$, gdzie A to wielolinia łącząca u i v, dodatkowo $\mathcal{E}_G(e) \cap V(G) = \emptyset$
- $\forall e,e' \in E(G)$, $e \neq e'$: $\mathcal{E}_G(e) \cap \mathcal{E}_G(e') = \emptyset$.

G jest grafem planarnym (planar graph) jeśli istnieje graf płaski Γ taki, że G i Γ są izomorficzne. Γ nazywamy rysunkiem planarnym G.

Komponenty $\mathbb{R}^2 \setminus G$ $\left(V(G) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \mathcal{E}_G(e)\right)$ nazywamy ścianami (faces) G i oznaczamy $F(G)$.

Korzystając z podobnego argumentu jak w Tw. Jordana możemy pokazać

Jeśli



$|s \cap G| = 1$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus G$

brzeg zbioru

to $e \subset \partial f_1, \partial f_2$ i $\forall f \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$:

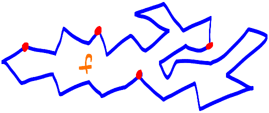
(*) $\partial f \cap e = \emptyset$

Mówimy, że f_1 i f_2 są incydentne do e.

Uwaga f_1 może być równe f_2!

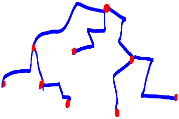
W szczególności:

Fakt $f \in F(G) \Rightarrow \partial f$ to suma krawędzi i wierzchołków



Lemat 2.0 Jeśli G jest izomorficzne z lasem to $|F(G)| = 1$.

Dowód



Gdyby było więcej ścian, to któraś ograniczona. Ale wtedy z faktu dostajemy cykl $\rightarrow$ ↯. ⊠

Lemat 2.1 G' podgraf G, $f \in F(G)$, $f' \in F(G')$

(i) każda ściana G zawiera się w jakiejś ścianie G'

(ii) $\partial f \subset G' \Rightarrow f \in F(G')$

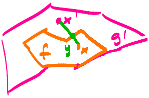
(iii) $f' \cap G = \emptyset \Rightarrow f' \in F(G)$

Dowód Ad (i). $G' \subset G \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus G \subset \mathbb{R}^2 \setminus G'$

$\Rightarrow$ komponent $\mathbb{R}^2\setminus G$ zawiera się w komponencie $\mathbb{R}^2\setminus G'$

Ad (ii). $\overset{(i)\Rightarrow}{\exists}\, g'\in F(G') : f\subset g'$ • $f=g'$ ✓

• $f \subsetneq g'$



$y\in\partial f$

$y\in g'$

$\Rightarrow y\notin G'$ ↯

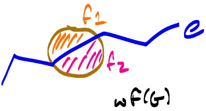
Ad (iii). f' wielokątowo spójny podzbiór $\mathbb{R}^2\setminus G$

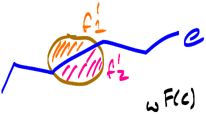
$\Rightarrow \exists g\in F(G) : f'\subset g$, ale $(i)\Rightarrow g\subset f' \Rightarrow f'=g$

⊠

Lemat 2.2 $C\subset G$ cykl, $e\in E(C)$, $f_1,f_2\in F(G)$ incydentne do e $\Big]\Rightarrow f_1\neq f_2$

Dowód C to właściwy wielokąt $\xRightarrow{\text{Tw. Jordana}} |F(C)|=2$, $F(C)=\{f_1',f_2'\}$





$\Rightarrow$ $f_1\cap f_1'\neq\emptyset \Rightarrow f_1\subset f_1'$

$f_2\cap f_2'\neq\emptyset \Rightarrow f_2\subset f_2'$

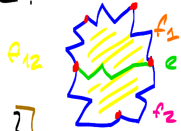
$\Rightarrow f_1\neq f_2$ ⊠

Lemat 2.3 $e\in E(G)$; $f_1,f_2\in F(G)$ incydentne do e.

$f_{12} := f_1\cup e\cup f_2$

Wtedy: $[f_{12}\in F(G-e)]$;

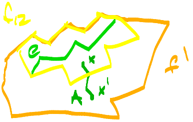
$[F(G)\setminus\{f_1,f_2\} = F(G-e)\setminus\{f_{12}\}]$



Dowód f_{12} spójne, więc $f_{12}\subset f'$ dla pewnego $f'\in F(G-e)$.

• $f_{12}=f'$ ✓

• $f_{12}\subsetneq f'$



$x'\notin G \Rightarrow x'\in f$ dla jakiegoś $f\in F(G)$

$f\neq f_1, f\neq f_2$

Ale $A\cap G=\emptyset$, więc $x\in f$ ↯

$\Rightarrow f_{12}\in F(G-e)$ ✓

▨ :

$(\subset)$ $f\in F(G)\setminus\{f_1,f_2\} \Rightarrow \partial f\subset G\setminus e$, $f\neq f_{12}$

$\overset{L2.1(ii)}{\Longrightarrow} f \in F(G-e) \setminus \{f_{12}\}$

$(\supset)$ $f' \in F(G-e) \setminus \{f_{12}\} \Rightarrow f' \cap G = \emptyset,\ f' \notin \{f_1, f_2\}$

$\overset{L2.1(iii)}{\Longrightarrow} f' \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$ ☒

3. Formuła Eulera

Twierdzenie (Formuła Eulera)

G - spójny graf płaski

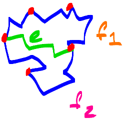
niespójne: #komponentów +1

$$\Rightarrow |V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + \boxed{2}$$

Dowód Indukcja na $|E(G)|$.

- G drzewo $\xrightarrow{L2.0}$ $|F(G)| = 1$, ponadto $|V(G)| = n$, $|E(G)| = n-1$ $\quad n+1 = (n-1)+2$ ✓
- G nie drzewo $\rightarrow \exists C$ cykl $C \subset G$

ustalmy $e \in E(C)$, $f_1, f_2 \in F(G)$ incydentne do e



$\overset{L2.2}{\Longrightarrow} f_1 \neq f_2$

$G' = G - e$ indukcja $\Rightarrow$ $\underset{|V(G)|}{\underset{\parallel}{|V(G')|}} + \underset{|F(G)|-1}{\underset{\parallel}{|F(G')|}} = \underset{|E(G)|-1}{\underset{\parallel}{|E(G')|}} + 2$

$$\boxed{\overset{L2.3}{\Longrightarrow} |F(G') \setminus \{f_{12}\}| = |F(G) \setminus \{f_1, f_2\}|}$$

☒

Lemat 3 G - planarny, $|V(G)| \geq 3$, G spójny

- $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$
- $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$ jeśli G nie ma trójkątów

Dowód $q = |\{(e,f) : e \in E(G),\ f \in F(G);\ e \text{ incydentne do } f\}|$

↑ jeśli e incydentny tylko do jednej ściany to liczymy dwa razy!

- $q = 2|E(G)|$
- dana ściana jest incydentna do ≥ 3 krawędzi (≥ 4) jeśli nie ma $\triangle$

$$\Rightarrow \quad q \geq 3|F(G)|$$

$$2|E(G)| = q \geq 3|F(G)| \overset{FE}{=} 3(|E(G)| - |V(G)| + 2)$$

$$3|V(G)| - 6 \geq |E(G)| \quad ✓$$

$$2|E(G)| = q \geq 4|F(G)| \overset{FE}{=} 4(|E(G)| - |V(G)| + 2)$$

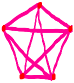
$$4|V(G)| - 8 \geq 2|E(G)|$$

$$2|V(G)| - 4 \geq |E(G)| \quad ✓$$

☒

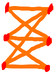
Dobre narzędzie do weryfikowania nie planarności.

Przykłady

- $K_5 =$  $|V(K_5)| = 5$, $|E(K_5)| = 10$

  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$

  $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ ↯

- $K_{3,3} =$  nie ma $\triangle$! $|V(K_{3,3})| = 6$, $|E(K_{3,3})| = 9$

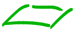
  $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$

  $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ ↯

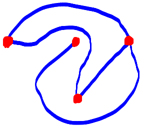
Najmniejsze grafy nieplanarne: $K_5, K_{3,3}$ — wrócimy do nich!

4. Rysowanie grafów planarnych

- Wielościany ✓

Fakt  ≡

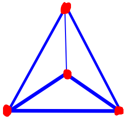
- Krzywe ?



Można, ale trudniejsze technicznie

np. dowód tw. Jordana wymaga topologii algebraicznej ...

- Segmenty ?



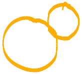
Można!

Dowód nietrywialny.

Np. poprzez:

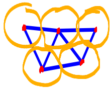
- wierzchołki : okręgi w $\mathbb{R}^2$

krawędzie :



styczność zewnętrzna

Wiele nieelementarnych dowodów ...



Circle packing theorem

Coin graphs

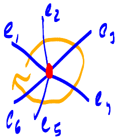
Kissing representation

Unikalność rysunków ?

Zanurzenie :

(embedding)

(combinatorial isomorphism)



Twierdzenie (Whitney 1933)

Każdy 3-spójny graf planarny ma unikalne zanurzenie płaskie.

Kiedy graf płaski jest maksymalny (nie da się dodać krawędzi)?

Gdy każda ściana jest Δ. → triangulacja

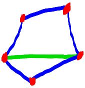
Lemat G - płaski:

(i) $\exists\, G'$ triangulacja : G podgraf G', $V(G) = V(G')$

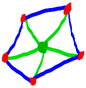
(ii) $\exists\, G''$ triangulacja : G podgraf indukowany G'

Dowód

Ad (i)



Ad (ii)



⊠

Fakt G planarny, spójny, $|V(G)| \geq 3$

G triangulacja $\iff$ $|E(G)| = 3|V(G)| - 6$

5. Charakteryzacja przez zabronione podstruktury [redacted]

Przykłady

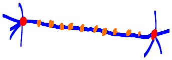
- bez cyklu jako podgrafu ≡ lasy
- bez parzystego cyklu jako podgrafu ≡ dwudzielne
- bez P_4 jako indukowanego podgrafu ≡ kografy
- itd...

Dobre jak grafy są bardzo proste lub lista jest skończona.

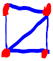
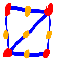
Grafy planarne?

Czy istnieje skończona lista podgrafów, które należy zabronić aby scharakteryzować grafy planarne?

NIE Załóżmy, że tak: $H_1, \dots, H_k$.

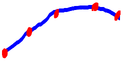
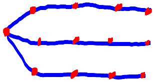


Fakt G planarny => G° planarny

G =  G° = 

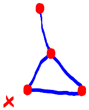
$M = |V(H_1)| + \dots + |V(H_k)| + 1$

Wykonajmy operację z faktu M razy → nowy graf nie zawiera $H_1, \dots, H_k$, chyba, że

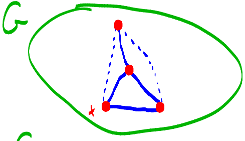
H_i =  lub  ale te są planarne, więc nie!

To co robić?

6. Minory

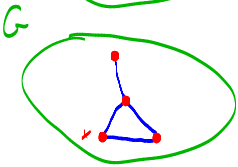
H = 

I. H podgraf indukowany G :



⇓

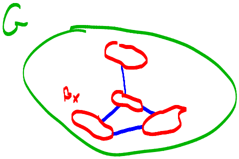
II. H podgraf G



Fakt

⇓

III. H minor G

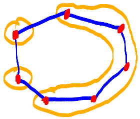


(H is a minor of G)

Def H jest **minorem** G jeśli istnieje $\{B_x : x \in V(H)\}$ (branch set) takie, że:

1) $B_x \subset V(G)$
2) $x \neq y \Rightarrow B_x \cap B_y = \emptyset$
3) $G[B_x]$ spójny
4) $xy \in E(H) \Rightarrow \exists\, uv \in E(G) : u \in B_x, v \in B_y$

Przykład Δ jest minorem C dla każdego cyklu C.

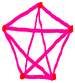


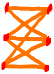
Wniosek

G las $\Leftrightarrow$ Δ nie jest minorem G

Twierdzenie (Wagnera Kuratowski 1930)

G planarny $\Leftrightarrow$ K_5 i $K_{3,3}$ nie są minorami G

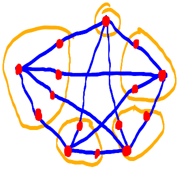




Dowód } elementarny, ale techniczny — pominięty ✓

Certyfikat nieplanarności!

Przykład Czy K_5° jest planarny?



nie.

Proszę mi sprawdzić wszystkie rysunki!

Jakie inne rzeczy można scharakteryzować przez minory?

Wiele różnych, np.

Twierdzenie

Istnieje SKOŃCZONA rodzina grafów $\mathcal{H}$ taka, że

G da się narysować na torusie

$\Longleftrightarrow$

$\forall_{H \in \mathcal{H}}$: H nie jest minorem G

Uwaga: nikt (na razie) nie umie „wypisać" $\mathcal{H}$.

Wiadomo, że $17523 \le |\mathcal{H}| \le 250815$

(Myrvold, Woodcock, 2018')

Czy tw Kuratowskiego daje algorytm na sprawdzanie planarności?

- Tak, ale superliniowy i z fatalną stałą.
- Istnieje wiele wydajnych w praktyce liniowych algorytmów.

(Hopcroft, Tarjan, 1974) ...

7. Kolorowanie

Ile kolorów potrzeba, żeby pokolorować graf planarny?

Lemat 7.1 G planarny $\Rightarrow$ $\delta(G) \le 5$

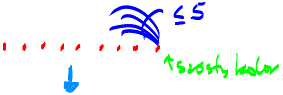
Dowód niewprost:

$\delta(G) \ge 6$

FE $\Rightarrow$ $|V(G)| = n$

$|E(G)| \le 3n - 6 \quad / \cdot 2$

$2\underset{\shortparallel}{|E(G)|} \le 6n - 12$



$$6n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \leq 6n-12$$

$0 \leq -12$ ↯

⊗

Wniosek G planarny $\Rightarrow \chi(G) \leq \mathrm{col}(G) \leq 6$

Twierdzenie G planarny $\Rightarrow \chi(G) \leq 5$

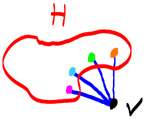
Dowód) Niewprost, niech G najmniejszy kontrprzykład. Tzn:

$$\chi(G) > 5, \ \forall_{H \text{ planarny}} : |V(H)| < |V(G)| \Rightarrow \chi(H) \leq 5.$$

Obs 0: G spójny

Obs 1: $\delta(G) \geq 5$ (L7.1 $\Rightarrow \delta(G) = 5$)

Gdyby istniał $v \in V(G)$: $\deg(v) < 5$ to z minimalności kolorujemy $H = G - v$ i możemy użyć wolnego koloru!



ok.

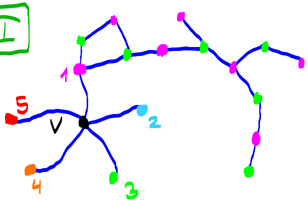
$$\delta(G) = 5 \Rightarrow \exists v \in V(G) : \deg(v) = 5$$

Kolorujemy $H = G - v$ z minimalności.

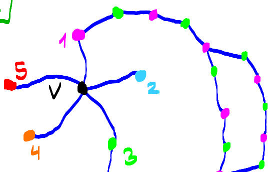
W sąsiedztwie v muszą być wszystkie kolory bo inaczej j.w.

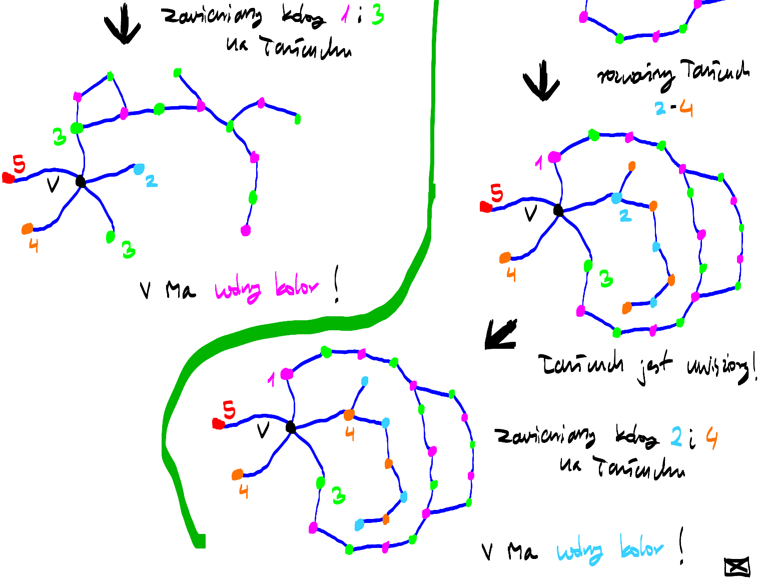
1-3 Łańcuch Kempego = max komponent z kolorami 1 i 3

Przypadek I



Przypadek II





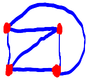
Uwagi:

- Istnieją liniowe algorytmy 5-kolorowania grafów planarnych.
- Technika łańcuchów Kempego jest bardzo użyteczna:
  - → tw. Brooksa
  - → tw. Vizinga (1964): Każdy graf można pokolorować krawędziowo $\Delta(G)+1$ kolorami.
    - * potrzeba $\Delta(G)$ kolorów
    - * zachłannie $2\Delta(G)-1$
- Wiele prac na temat osiągalności kolorowań poprzez zamiany na łańcuchach Kempego: problem rekonfiguracji kolorowań.

8. Twierdzenie o 4 kolorach

Wracając do kolorowania grafów planarnych ...

- 6 kolorów : oczywiste z formuły Eulera
- 5 kolorów : proste z Łańcuchów Kempego
- 4 kolory : ???
- 3 kolory : nie da się



= K_4

1852 : Francis Guthrie - pierwsza znana referencja do pytania

↖ student Augustusa De Morgana

(University College London)

~~grafy~~ → mapa hrabstw Anglii

1879 : Alfred Kempe - pierwszy dowód Łańcuchy Kempego!

1880 : Peter Guthrie Tait - drugi dowód

↕ 10 lat!

1890 : Percy Heawood - dowód Kempego fałszywy!

1891 : Julius Petersen - dowód Taita fałszywy!

1960/70 : Heinrich Heesch - Metoda „discharging"

1976 : Appel, Hakken, Koch - dowód! (po 123 latach!)

(University of Illinois)

- ~1500 konfiguracji do sprawdzenia przez komputer
- pierwszy „ważniejszy" dowód używający komputera
- wiele małych błędów zauważonych przez innych ludzi
- algorytm $O(n^4)$

1989 : Appel, Haken - książka z poprawionym dowodem

+ algorytm $O(n^2)$ ↙

1995: Robertson, Sanders, Seymour, Thomas - uproszczenie (633 konfiguracje)

2005: Gonthier, Werner - weryfikacja dowodu programem Coq

9. Uogólnienia

I. Inne powierzchnie.

Istnieje dokładny wzór ile potrzeba kolorów i jest trochę prosty

$$\left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor$$

1890: Heawood conjecture

1968: Ringel, Youngs

II.

• 3 kolory: nie da się

...

A kiedy się da?

1959: Grötzsch: $\boxed{G\text{-planarny bez } \triangle \Rightarrow \chi(G) \leq 3}$

dowód dość skomplikowany

później wiele uproszczeń np:

2014: Asghar
2018: Kostochka, Yancey

A co jak są $\triangle$?

1976

1991: Pytanie Erdősa (wcześniej hipoteza Steinberga)

Jakie jest najmniejsze k takie, że:

podgrafy

$$G \text{ planarny bez } C_4, C_5, \ldots, C_k \Rightarrow \chi(G) \leq 3 \;?$$

1991: Abbott, Zhou $k \leq 11$ (nietrudne)

1995: Sanders, Zhao $k \leq 9$

2002: Salavatipour $k \leq 8$

2005: Borodin, Glebov, Raspaud, Salavatipour $k \leq 7$

2017: Cohen-Addad, Hebdige, Král', Li, Salgado $6 \leq k$ (czyli dla C_4, C_5 nie działa)

$k = 6$ czy $k = 7$?

OTWARTE!

III. Minory

tw. Kuratowskiego

planarny $\Leftrightarrow$ bez minorów $K_{3,3}; K_5$

1937: Wagner:

$$\boxed{G \text{ planarny} \Rightarrow \chi(G) \leq 4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{G \text{ bez } K_5 \text{ minora} \Rightarrow \chi(G) \leq 4}$$

1943: **Hipoteza Hadwigera**

$$\boxed{G \text{ bez } K_t \text{ minora} \Rightarrow \chi(G) \leq t-1}$$

$t = 3$ ✓

$t = 4$ Hadwiger 1943

$t = 5$ wynika z tw. o 4 kolorach (+Wagner)

$t = 6$ 1993 Robertson, Seymour, Thomas

$t = 7$ OTWARTE!

Inne ważne wyniki:

1984: Kostochka, Thomason:

$$G \text{ bez } K_t \text{ minora} \Rightarrow col(G) \leq O(t\sqrt{\log t})$$

2020: Norin, Postle, Song

$$G \text{ bez } K_t \text{ minora} \Rightarrow \chi(G) \leq O(t\sqrt[4]{\log t})$$

⋮

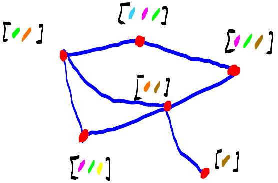
2024: Delcourt, Postle

$$G \text{ bez } K_t \text{ minora} \Rightarrow \chi(G) \leq O(t \log\log t)$$

Hipoteza pozostaje OTWARTA!

10. Kolorowanie listowe

1970s: Vizing, Erdős, Rubin, Taylor



Formalnie: (choice number) ↓ $ch(G)$

G ma listową liczbę chromatyczną co najwyżej k jeśli: ≡ k-wybieralny

$$\forall S: V(G) \to 2^{\mathbb{N}}\ \forall v \in V(G): |S(v)| \le k$$

$$\text{istnieje } \underbrace{c: V(G) \to \mathbb{N}\ \forall v \in V(G): c(v) \in S(v)}_{S\text{-kolorowanie}}$$

Fakt $\chi(G) \le ch(G) \le col(G)$

$S(v) = \{1, \dots, k\}$ ↑ (pierwsza nierówność)

algorytm zachłanny ↑ (druga nierówność)

Marzy: czy wszystkie pary parametrów da się rozdzielić?

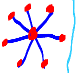
$$\omega(G) \overset{\text{TAK}}{\le} \chi(G) \overset{\text{TAK}}{\le} ch(G) \le col(G) \overset{\text{TAK}}{\le} \Delta(G)+1$$

wiele konstrukcji
$\omega(G_k) = 2$
$\chi(G_k) = k$

$\chi(K_{k,k}) = 2$
$ch(K_{k,k}) = \Omega(\log k)$
↑
ćwiczenia

?

$S_k =$



$col(S_k) = 2$
$\Delta(S_k) = k$

2000: Alon $ch(G) \geq \Omega(\log(col(G)))$

NIE

Twierdzenie (Thomassen 1994)

G planarny $\Rightarrow$ $ch(G) \leq 5$

Uwaga

1996: Mirzakhani:

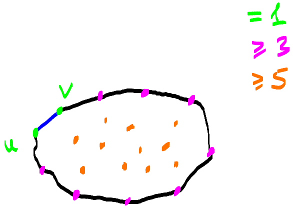
Istnieje graf planarny G:

$ch(G) = 5$, $\chi(G) = 3$

Dowód

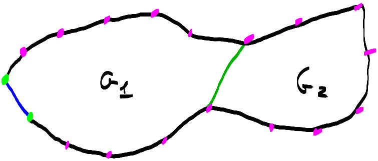
Wzmocniona indukcja:

- Każda ściana wewnętrzna jest Δ. (near triangulation)
- $f \in F(G)$ ściana zewnętrzna
- $S : V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$
- $\exists\, u,v \in V(G)$:
  - $uv \in E(G)$
  - $u,v \in \partial f$
  - $|S(u)| = |S(v)| = 1$
  - $S(u) \neq S(v)$
- $w \in \partial f \Rightarrow |S(w)| \geq 3$
- $x \in V(G) \Rightarrow |S(x)| \geq 5$

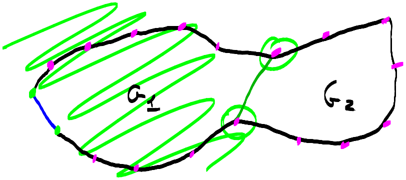


$\Rightarrow$ G ma S-kolorowanie

Przypadek 1 Istnieje cięciwa

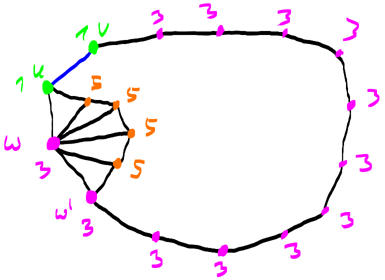


→ wywołamy indukcji do G_1



→ wywołamy indukcji do G_2 ✓

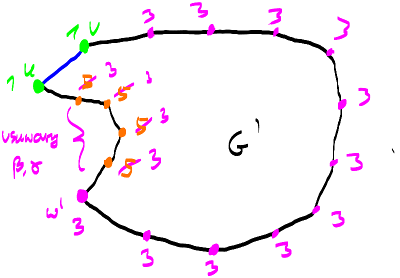
Przypadek 2   Nie ma cięciwy



$S(u) = \{\alpha\}$

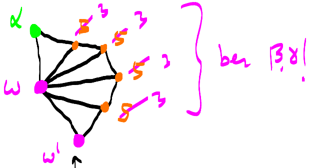
$S(w) \supset \{\beta, \gamma\}$

$\beta \neq \alpha$
$\gamma \neq \alpha$



Indukcja do G'

Jaki kolor dla w?



jakiś kolor, ale tylko jeden

więc w ma wolny kolor!

⊠