Kolokwium 1

Zadanie 1 (4p)**.** Niech $a_1, \ldots, a_n$ oraz $b_1, \ldots, b_n$ będą dwiema permutacjami zbioru $[n]$. Wykaż, że istnieją indeksy $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ dla $k = \lceil n^{\frac{1}{4}} \rceil$ takie, że oba podciągi $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ oraz $b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}$ są monotoniczne.

Zadanie 2 (4p)**.** *Multizbiór* to zbiór wyposażony dodatkowo w krotność każdego elementu. (Krotność jest dodatnią liczbą naturalną która jest interpretowana jako liczba wystąpień elementu w multizbiorze.) Dla przykładu $\{1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 5, 5\}$ to multizbiór w którym element 1 ma krotność 3. *Rozmiar* multizbioru to suma krotności jego elementów. Powyższy multizbiór ma rozmiar 9.

Ile jest multizbiorów rozmiaru k, których elementy należą do zbioru $\{1, \ldots, n\}$?

Zadanie 3 (5p)**.** Niech a_n oznacza liczbę podziałów liczby n na składniki parami różne oraz niech b_n (c_n) oznaczają liczbę podziałów n na parzystą (odpowiednio, nieparzystą) liczbę składników. Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi równość:

$$\prod_{i=0}^{n} (b_i - c_i) \cdot a_{n-i} = 0.$$

Zadanie 4 (5p)**.** Ciąg u_n zadany jest nastepującą rekurencją:

$$u_0 = 1, \; u_{n+1} - 2u_n = n\alpha^n \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Podaj, w zależności od parametru α, wzór na u_n (wzór ten może wykorzystywać stałe, których wartości nie trzeba obliczać).

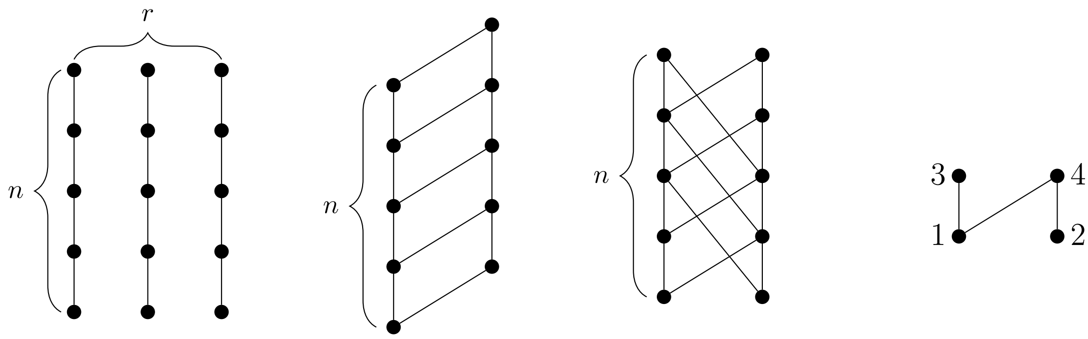
Zadanie 5 (3p+1.5p+1.5p)**.** Niech $n, m \geqslant 1$. Ile jest macierzy rozmiaru $m \times n$ wartościach nad zbiorem $\{0, 1\}$, takich, że

(i) każdy wiersz i każda kolumna zawiera co najmniej jedną jedynkę? (wynik może być sumą wielomianowej w zależności od n liczby składników)
(ii) każdy wiersz i każda kolumna zawiera parzyście wiele jedynek?
(iii) każdy wiersz i każda kolumna zawiera nieparzyście wiele jedynek?

Zadanie 6 (3p+3p+3p)**.** Liniowym rozszerzeniem porządku $P = (V, \leqslant_P)$ nazywamy liniowy porządek $L = (V, \leqslant_L)$ taki, że $x \leqslant_P y$ implikuje $x \leqslant_L y$ dla każdego $x, y \in V$. Ile jest rozszerzeń liniowych (patrz Rysunek 1):

(i) posetu $A[n, r]$?
(ii) posetu $B[n]$?
(iii) posetu $C[n]$?

Wynik należy przedstawić w postaci zwartej.



$A[n, r]$ $B[n]$ $C[n]$

Rysunek 1: Kolejno, diagramy Hasssego posetów: $A[n, r]$, $B[n]$ oraz $C[n]$. Poset $C[2]$ ma 5 liniowych rozszerzeń: 1234, 1243, 2134, 2143, oraz 1234.

Zadanie 7 (5p)**.** Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : 2^{[N]} \to [k]$ istnieją cztery monochromatyczne zbiory $A, B_1, B_2, C \subseteq [N]$ takie, że

$$A \subsetneq B_1 \subsetneq C,\ A \subsetneq B_2 \subsetneq C,\ B_1 \not\subseteq B_2, \text{ oraz } B_2 \not\subseteq B_1.$$

Uogólnij swoje rozwiązanie tak aby wykazać, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ oraz dowolnego $n \geqslant 1$ istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : 2^{[N]} \to [k]$ istnieje $X \subseteq 2^{[N]}$ takie, że $|X| = 2^n$ oraz poset $(X, \subseteq)$ jest izomorficzny z $(2^{[n]}, \subseteq)$.

Powodzenia!