Kolokwium 2

Zadanie 1 (`5 punktów`). Wykaż, że każdy graf 3-regularny z cyklem Hamiltona jest krawędziowo 3-kolorowalny.

Zadanie 2 (`6 punktów`). Wykaż, że algorytm First-Fit koloruje dowolny graf przecięć przedziałów o długości 1 lub 10 (przy dowolnej kolejności podawania przedziałów) używając co najwyżej 4ω kolorów, gdzie ω jest maksymalną wielkością kliki w podanym grafie.

Zadanie 3 (`6 punktów`). Kraj Bajtocji podzielony jest na n województw i n stref zmilitaryzowanych, przy czym obszar każdego województwa i każdej strefy zmilitaryzowanej ma pole 1. Wykaż, że w kraju tym można wybudować n baz tak, że każde województwo i każda strefa ma dostęp do dokładnie jednej bazy.

Zadanie 4 (`5 punktów`). Niech $G = (X, Y, E)$ będzie grafem dwudzielnym, w którym $|X| = |Y| = n$. Wykaż, że poniższe zdania są równoważne:

(i) G posiada dopasowanie rozmiaru $n - k$;
(ii) dla każdego $A \subseteq X$ zachodzi $|N(A)| + k \geqslant |A|$.

Zadanie 5 (`6 punktów`). W przyjęciu wydawanym przez Profesora Bajtka i jego żonę bierze udział n par. Po przyjęciu profesor Bajtek spytał każdą z pozostałych $2n - 1$ osób, z iloma osobami dana osoba się witała (osoby z tej samej pary oczywiście w trakcie przyjęcia się nie witają). Na swoje zapytania profesor otrzymał $2n-1$ różnych odpowiedzi. Z iloma osobami przywitała się żona profesora Bajtka?

Zadanie 6 (`6 punktów`). 2-*przedział* to podzbiór $\mathbb{R}$ powstały w wyniku sumy dwu przedziałów w $\mathbb{R}$. Wykaż, że dla dowolnego grafu przecięć 2-przedziałów G zachodzi

$$\chi(G) \leqslant 4\omega(G),$$

gdzie $\omega(G)$ jest liczbą klikową G.

Zadanie 7 (`6 punktów`). Niech T będzie drzewem i niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną poddrzew T. Graf przecięć rodziny $\mathcal{T}$ to graf którego wierzchołki odpowiadają poddrzewom w $\mathcal{T}$ i dwa wierzchołki sąsiadują jeśli odpowiadające im poddrzewa się przecinają. Rozstrzygnij czy:

(i) istnieje funkcja f taka, że dla każdej rodziny $\mathcal{T}$ jej graf przecieć G spełnia $\chi(G) \leqslant f(\omega(G))$?
(ii) istnieje funkcja f taka, że dla każdej rodziny $\mathcal{T}$ jej graf przecieć G spełnia $\mathrm{col}(G) \leqslant f(\omega(G))$?

Powodzenia!