

Kolokwium I

Zadanie 1 (3 pkt). Dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ i $s \in \mathbb{N}_1$, symbolem $\binom{n}{k}_s$ oznaczamy liczbę wszystkich k -elementowych multizbiorów z elementami w $[n]$, gdzie każdy element występuje co najwyżej s razy. Udowodnij, że

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^s \binom{n-1}{k-j}_s.$$

Zadanie 2. Niech $n \in \mathbb{N}_3$. Przekształć do jak najprostszej postaci:

- (i) (1 pkt) $\sum_{k=0}^n (-3)^k \binom{n}{k}$,
- (ii) (1 pkt) $\sum_{k=0}^n (-2)^k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$,
- (iii) (1,5 pkt) $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k+1} 5^k$.

Zadanie 3 (3 pkt). Na ile sposób można podzielić liczbę $n \in \mathbb{N}_1$ na składniki dodatnie nieparzyste, gdzie kolejność składników ma znaczenie. Na przykład, dla liczby 5 odpowiedź wynosi 5: $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 3 = 1 + 3 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5)$.

Zadanie 4 (4 pkt). Udowodnij, że dla każdego $y, m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{d=0}^y \binom{m+y}{y-d} \binom{m}{d} (-1)^d = 1.$$

Zadanie 5 (3 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Ile jest ciągów liczb całkowitych a_1, \dots, a_n takich, że $a_1 = 0$ oraz $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$? Na przykład, takich ciągów długości 3 jest 5: 000, 001, 010, 011 i 012.

Zadanie 6 (3 pkt). Niech \mathcal{D}_n będzie rodziną wszystkich ścieżek Dycka długości $2n$. Dla danej ścieżki Dycka $x \in \{-1, 1\}^{2n}$ niech $m_x = |\{i \in \{0, 1, \dots, 2n\} \mid \sum_{j=0}^i x_j = 0\}|$. Zatem m_x to liczba przecięć wykresu x z osią OX , patrz rysunek 1. Dla $n \in \mathbb{N}_1$, oblicz $\sum_{x \in \mathcal{D}_{n-1}} m_x$.

Zadanie 7.

- (i) (1 pkt) Znajdź wszystkie rozwiązania równania $231x + 39y = 15$ w liczbach całkowitych.
- (ii) (1 pkt) Czy istnieje $x \in \mathbb{Z}$ taki, że $7x^2 + 12x + 1 \equiv 0 \pmod{131}$?
- (iii) (1,5 pkt) Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych układu
$$\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 8 \pmod{11} \end{cases}.$$

Zadanie 8 (3 pkt). Niech $p, k \in \mathbb{N}$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą i $1 < k < p$. Udowodnij, że $\left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} \equiv 0 \pmod{p}$. A ile jest równe $\left[\begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right] \pmod{p}$?

Zadanie 9 (3 pkt). Udowodnij, że jeśli p jest liczbą pierwszą taką, że $p \equiv 3 \pmod{4}$ to nie istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $p \mid n^2 + 1$.

Zadanie 10 (4 pkt). Ile jest ciągów długości n nad zbiorem symboli $\{A, B, C, D\}$ takich, że A występuje nieparzyście wiele razy i B występuje nieparzyście wiele razy? Na przykład takich ciągów długości 3 jest 12: $ABC, ABD, BAC, BAD, ACB, ADB, BCA, BDA, CAB, DAB, CBA, ADB$.

Zadanie 11.

(i) (2 pkt) Niech $a_0 = 0, a_1 = 4$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 2^n(n+1).$$

Wyznacz zwarty wzór na a_n .

(ii) (1 pkt) Niech $b_0 = b_1 = 0, b_2 = b_3 = 1$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$b_{n+4} = 2b_{n+3} - b_{n+1} + b_n.$$

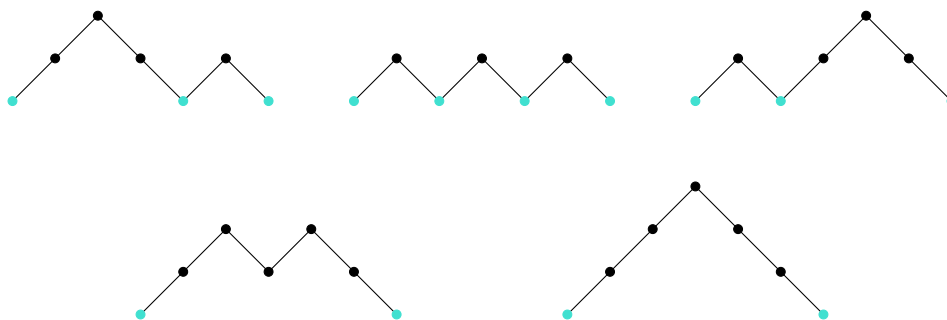
Wyznacz zwarty wzór na funkcję tworzącą ciągu $(b_n)_{n=0}^{\infty}$.

(iii) (1 pkt) Znajdź zwartą postać funkcji tworzącej ciągu

$$(1, 2, 3, 4, 9, 6, 27, 8, 81, 10, \dots, 2k, 3^k, 2(k+1), 3^{k+1}, \dots).$$

Zadanie 12 (3 pkt). Dla $n \in \mathbb{N}_1$ wyznacz zwarty wzór na

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n, k_i>0} F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdot \dots \cdot F_{k_m}.$$



Rysunek 1: Wartość dla $n = 4$ to 14.

Powodzenia.