Kolokwium poprawkowe

Zadanie 1 (8 punktów)**.** Rozważ rodzinę grafów $\{G_n\}_{n\geqslant 1}$, gdzie

$$V(G_n) = \{(a,b) \mid 1 \leqslant a < b \leqslant n \text{ oraz } a,b \in \mathbb{N}\}$$
$$E(G_n) = \{((a,b),(c,d)) \mid (a,b),(c,d) \in V(G_n) \text{ oraz } (b = c \text{ lub } a = d)\}.$$

Czy liczba klikowa grafów w tej rodzinie jest nieograniczona? Czy liczba chromatyczna grafów w tej rodzinie jest nieograniczona? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2 (8 punktów)**.** Kraj Bajtocji podzielony jest na 16 województw oraz 16 stref zmilitaryzowanych. Każde województwo i każda strefa zmilitaryzowana zajmuje 1024 kilohektarów. Wykaż, że w Bajtocji można wybudować 16 jednostek wojskowych tak, by każde województwo i każda strefa zmilitaryzowana zawierała dokładnie jedną jednostkę.

Zadanie 3 (10 punktów)**.** Wykaż następujące tożsamości: (Ciąg $(f_n)_{n\geqslant 0}$ to kolejne liczby Fibonacciego, a zatem $f_0 = 0, f_1 = 1, \ldots$)

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k},$$
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = f_{n+1},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k} = \left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}.$$

Zadanie 4 (8 punktów)**.** Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą dla ciągu $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Wskaż funkcję tworzącą dla następujących ciągów:

(i) $b_n = (a_n + a_{n+1})/2$ dla $n \geqslant 0$,
(ii) $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_n = a_n + 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$,
(iii) $d_n = 2^n \cdot a_n$ dla $n \geqslant 0$,
(iv) $e_n = n \cdot a_0 + (n-1) \cdot a_1 + \cdots + 1 \cdot a_n$ dla $n \geqslant 0$.

Zadanie 5 (8 punktów)**.** Wykaż, że dowolny graf o liczbie chromatycznej co najmniej n zawiera każde drzewo na n wierzchołkach jako podgraf (niekoniecznie indukowany).

Zadanie 6 (8 punktów)**.** Wykaż, że dla dowolnego $k \geqslant 1$, istnieje N takie, że dla każdego kolorowania $c : [N] \to [k]$ istnieją $x, y, z \in [N]$ takie, że

$$c(x) = c(y) = c(z) \quad \text{oraz} \quad x \neq y \quad \text{oraz} \quad x + y = z.$$

Zadanie 7 (8 punktów)**.** Ile rozwiązań ma równanie

$$x_1 + \cdots + x_k + y_1 + \cdots + y_{2k} = n,$$

gdzie wszystkie zmienne przyjmują wartości całkowite oraz $x_i \geqslant 0$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$, a $y_i \geqslant 1$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, 2k\}$?

Powodzenia!