Wymiar i porządki przedziałowe

Niech P i Q będą posetami na rozłącznych zbiorach X i Y, odpowiednio. Poset $P+Q$ jest zdefiniowany na zbiorze $X \cup Y$ tak, że

(i) $x \leqslant x'$ w $P+Q$ kiedykolwiek $x \leqslant_P x'$ dla $x, x' \in X$,
(ii) $y \leqslant y'$ w $P+Q$ kiedykolwiek $y \leqslant_Q y'$ dla $y, y' \in Y$, oraz
(iii) $x \parallel y$ w $P+Q$ dla $x \in X$, $y \in Y$.

Poset $P \times Q$ jest zdefiniowany na zbiorze $X \times Y$ tak, że

$$(x,y) \leqslant (x',y') \text{ w } P \times Q \text{ jeśli } x \leqslant_P x' \text{ i } y \leqslant_Q y' \text{ dla } x, x' \in X,\ y, y' \in Y.$$

Niech P będzie posetem a $x \in P$. Przez $U[x]$ oraz $U(x)$ oznaczamy *stożek górny* elementu x oraz *otwarty stożek górny* elementu x, natomiast przez $D[x]$ oraz $D(x)$ oznaczamy *stożek dolny* elementu x oraz *otwarty stożek dolny* elementu x, gdzie

$$\begin{aligned} U[x] &= \{y \geqslant x \mid y \in P\}, \\ U(x) &= \{y > x \mid y \in P\}, \\ D[x] &= \{y \leqslant x \mid y \in P\}, \\ D(x) &= \{y < x \mid y \in P\}. \end{aligned}$$

Zadanie 1. Wykaż, że dwie definicje wymiaru podane na wykładzie są równoważne. (tj. definicja poprzez najmniejsze d takie, że elementy posetu można odpowiednio włożyć w $\mathbb{R}^d$ oraz definicja poprzez przecięcie liniowych rozszerzeń).

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnych posetów P i Q zachodzi

(i) $\dim(P) \leqslant \dim(P-x)+1$ dla dowolnego $x \in P$,
(ii) $\dim(P) \leqslant \dim(P-x-y)+1$ dla dowolnych $x \in \min(P)$, $y \in \max(P)$,
(iii) $\dim(P+Q) \leqslant \max(\dim(P), \dim(Q), 2)$,
(iv) $\dim(P \times Q) \leqslant \dim(P) + \dim(Q)$.

Graf porównywalności posetu P to graf którego wierzchołki są elementami P i dwa wierzchołki sąsiadują w G jeśli odpowiadające im elementy są porównywalne w P.

Zadanie 3. Niech P będzie posetem. Wykazać, że następujące warunki są równoważne

(i) P jest dwuwymiarowy,
(ii) istnieje reprezentacja elementów P jako przedziałów na osi rzeczywistej taka, że $x \leqslant y$ w P wtedy i tylko wtedy, gdy przedział x zawiera się w przedziale y,
(iii) dopełnienie grafu porównywalności P jest grafem porównywalności pewnego posetu.

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnego porządku przedziałowego P zachodzi

$$|\{D(x) \mid x \in P\}| = |\{U(x) \mid x \in P\}|.$$

Porządek P jest *słabym porządkiem* jeśli P można podzielić na antyłańcuchy $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 1$) w taki sposób, że $a_i < a_j$ w P dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$.

Zadanie 5. Wykazać, że następujące warunki są równoważne

(i) P jest słabym porządkiem,
(ii) P jest $(2+1)$-free.

Poset P jest porządkiem *równoprzedziałowym* jeśli jest porządkiem przedziałowym, który posiada reprezentację przedziałową o wszystkich przedziałach tej samej długości.

Zadanie 6. Niech P będzie posetem. Wykazać, że następujące warunki są równoważne

(i) P jest równoprzedziałowy,
(ii) P jest przedziałowy i posiada reprezentację przedziałową która nie zawiera dwu przedziałów takich, że jeden zawiera drugi i wszystkie końce tych dwu przedziałów są różne,
(iii) P jest $(2+2)$-free oraz $(3+1)$-free.

Zadanie 7. Niech P będzie porządkiem równoprzedziałowym. Wykazać, że

$$\dim(P) \leqslant 3.$$

I na koniec wyjątkowo o nieskończonych posetach ...

Zadanie 8. Wykazać, że dowolny nieskończony poset zawiera nieskończony łańcuch lub nieskończony antyłańcuch.