Wymiar i etykietowania triangulacji

Zadanie 1. Wykazać, że dla dowolnego posetu P i łańcucha C w P zachodzi

$$\dim(P) \leqslant \dim(P - C) + 2.$$

Zadanie 2. Niech M będzie podzbiorem punktów maksymalnych posetu P. Niech $\mathrm{width}(P \setminus M) \leqslant w$. Wykazać, że

$$\dim(P) \leqslant w + 1.$$

Zadanie 3 (Twierdzenie Hiraguchiego)**.** Wykazać, że dla dowolnego antyłańcucha A w posecie P mamy $\dim(P) \leqslant |P - A|$ o ile $|P - A| \geqslant 2$. Wywnioskować, że dla dowolnego posetu P, gdzie $|P| \geqslant 4$, zachodzi

$$\dim(P) \leqslant \frac{|P|}{2}.$$

Niech P będzie posetem. Nieporównywalna para $x \parallel y$ w P jest *krytyczna* jeśli

(i) dla każdego $z \in P$ takiego, że $z < x$ w P mamy $z < y$ w P, oraz
(ii) dla każdego $z \in P$ takiego, że $z > y$ w P mamy $z > x$ w P.

Innymi słowy, $D(x) \subseteq D(y)$ oraz $U(y) \subseteq U(x)$.

Dla przypomnienia, zbiór liniowych rozszerzeń $\{L_1, \ldots, L_d\}$ posetu P *odwraca* parę $(x, y) \in \mathrm{Inc}(P)$, jeśli istnieje $i \in [d]$ takie, że $y < x$ w L_i.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli zbiór liniowych rozszerzeń $\mathcal{R} = \{L_1, \ldots, L_d\}$ posetu P odwraca wszystkie krytyczne pary w P, to $\mathcal{R}$ odwraca wszystkie nieporównywalne pary w P, a więc jest realizatorem P.

Rozszczepienie posetu $P = (X, \leqslant)$ to poset $\mathrm{split}(P) = (X' \cup X'', \leqslant_s)$ taki, że $X' = \{x' \mid x \in X\}$ i $X'' = \{x'' \mid x \in X\}$ są rozłącznymi kopiami X oraz

$$x' <_s y'' \Leftrightarrow x \leqslant y \text{ w } P.$$

Zadanie 5. Wykazać, że dla dowolnego posetu P zachodzi

$$\dim(P) \leqslant \dim(\mathrm{split}(P)) \leqslant \dim(P) + 1.$$

Zadanie 6. Jaki wymiar ma poset incydencji K_5 (kliki 5-elementowej)?

Zadanie 7. Niech $D(n)$ będzie liczbą antyłańchów w kracie Boolowskiej $(2^n, \subseteq)$. Dla przykładu: $D(0) = 2$, $D(1) = 3$, $D(2) = 6$, $D(3) = 20$. $D(n)$ można spotkać w literaturze jako liczby Dedekinda.

Niech G_n^3 będzie podwójnym shift grafem rzędu n. A zatem wierzchołkami G_n^3 są 3-elementowe podzbiory $\{1, \ldots, n\}$ i dla dowolnej czwórki $1 \leqslant a < b < c < d$ mamy krawędź pomiędzy $\{a, b, c\}$ i $\{b, c, d\}$ w G_n^3.

Wykazać, że $\chi(G_n^3)$ to najmniejsza liczba t taka, że $D(t) \geqslant n$.

Niech G będzie grafem i ustalmy rysunek G na płaszczyźnie. (Rysunek grafu G to (1) przypisanie wierzchołkom (różnych) punktów na płaszczyźnie oraz (2) przypisanie każdej krawędzi krzywej łączącej punkty odpowiadające końcom krawędzi i rozłącznej z punktami pozostałych wierzhołków) Przecięcie narysowanych krawędzi e i f jest *trywialne* jeśli e i f mają wspólny koniec (a zatem może być, że $e = f$).

Zadanie 8. Wykazać, że jeśli G ma rysunek z jedynie trywialnymi przecięciami to G ma rysunek bez przecięć, a więc jest planarny.

3-*orientacja* triangulacji to skierowanie jej wewnętrznych krawędzi takie, że każdy wewnętrzny wierzchołek ma dokładnie 3 krawędzie wychodzące. Krawędzie zewnętrzne pozostają nieskierowane.
ccw - skierowanie przeciwne do wskazówek zegara
cw - skierowanie zgodnie ze wskazówkami zegara

Zadanie 9. Uzasadnij, że dla każdej 3-orientacji triangulacji G istnieją dokładnie trzy krawędziowe etykietowania Schnydera (wyznaczające ten sam podział na drzewa Schnydera), w których każda krawędź wewnętrzna jest skierowana zgodnie z 3-orientacją. Wskaż algorytm, który je wyznacza.

Zadanie 10. Niech $\mathcal{T}$ będzie 3-orientacją triangulacji G. Uzasadnij poniższe obserwacje.

(i) Jeśli C jest cyklem skierowanym w $\mathcal{T}$ i każda krawędź incydentna z wierzchołkiem w C i zawarta wewnątrz regionu otoczonego przez C jest skierowana (ze środka) do wierzchołka w C to C jest trójkątem.
(ii) Jeśli $\mathcal{T}$ zawiera skierowany cykl C to zawiera również skierowany w tym samym kierunku trójkąt "zawarty" regionie ograniczonym przez C.

Niech G będzie 4-spójną triangulacją, a $\mathcal{T}$ dowolną 3-orientacją G. Ściana f w G jest *flipowalna* jeśli wszystkie krawędzie brzegu f są skierowane ccw. Analogicznie f jest *flopowalna* jeśli wszystkie krawędzie brzegu f są skierowane cw.

Flip ściany f (flipowalnej) polega na zmianie kierunku wszystkich krawędzi f z ccw na cw. Flop sciany f (flopowalnej) polega na zmianie kierunku wszystkich krawędzi f z cw na ccw. Uzyskane w ten sposób nowe 3-orientacje będziemy oznaczać przez $\mathcal{T}_f$.

$(f_1, f_2, \ldots)$ jest *flip-ciągiem* jeśli ściana f_1 jest flipowalna w $\mathcal{T}$, f_2 jest flipowalna w $\mathcal{T}_{f_1}$, f_3 jest flipowalna w $\mathcal{T}_{f_1,f_2}$, itd. Analogicznie definiujemy *flop-ciąg*.

Zadanie 11. Niech G będzie 4-spójną triangulacją z 3-orientacją $\mathcal{T}$ i cyklem C skierowanym ccw. Niech c oznacza liczbę ścian w G zawartych wewnątrz C. Uzasadnij, że istnieje flip-ciąg S o długości c, taki, że $\mathcal{T}_S$ różni się od $\mathcal{T}$ jedynie skierowaniem wszystkich krawędzi na cyklu C.

Zadanie 12. Udowodnij, że każdy flip-ciąg S jest skończony.

Zadanie 13.

(i) Niech G będzie dowolną triangulacją, a $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ będą dwiema różnymi 3-orientacjami G. Udowodnij, że istnieje cykl C w G, który jest skierowany cw w jednej orientacji i przeciwnie w drugiej.

(ii) Niech G będzie dowolną triangulacją. Udowodnij, że istnieje co najwyżej jedna 3-orientacja nie zawierająca cyklu *ccw* oraz co najwyżej jedna 3-orientacja nie zawierająca cyklu *cw*.

(iii) Niech G będzie 4-spójną triangulacją. Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna 3-orientacja bez cykli ccw i dokładnie jedna orientacja bez cykli cw.