Wymiar, liczby pudełkowe, kwadrangulacje i triangulacje

Zadanie 0. Na wykładzie wykazaliśmy, że dla dowolnego posetu P z planarnym diagramem i zerem mamy $\dim(P) \leqslant 4$. Wykazać, że w tym przypadku mamy nawet

$$\dim(P) \leqslant 3.$$

Przecięcie $G_1 \cap \cdots \cap G_k$ grafów $G_1, \ldots, G_k$ na tym samym zbiorze wierzchołków V to graf $(V, E_1 \cap \cdots \cap E_k)$, gdzie E_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ to zbiór krawędzi G_i.

Graf G jest *przedziałowy* jeśli wierzchołki G można reprezentować jako przedziały w $\mathbb{R}$ tak, że wierzchołki sąsiadują w G wtedt i tylko wtedy, gdy odpowiadające im przedziały maja niepuste przecięcie. *Liczba pudełkowa* G, oznaczana $\mathrm{box}(G)$, to najmniejsza liczba naturalna d taka, że G jest przecięciem d grafów przedziałowych.

Zadanie 1. Niech $G = (X, Y; E)$ będzie grafem dwudzielnym, a P odpowiadającym mu posetem (powiedzmy, że X to minima a Y to maksima w P). Wykazać, że

$$\mathrm{box}(G) \leqslant \dim(P) \leqslant 2\,\mathrm{box}(G).$$

Graf porównywalności G_P posetu $P = (X, \leqslant)$ to graf taki, że jego zbiór wierzchołków to X oraz $xy \in E(G_P)$ jeśli x i y są porównywalne w P.

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnego posetu P mamy

$$\dim(P) \leqslant 2\,\mathrm{box}(G_P).$$

Kolejne dwa zadania są na dobrą sprawę prośbą o przeczytanie i zrozumienie kilku sekcji z pracy *Bijections for Baxter Families and Related Objects* autorstwa Felsnera i innych z 2011 roku (pdf).

Zadanie 3. Przeczytać i zrozumieć sekcję 2 wyżej wymienionej pracy o orientacjach bipolarnych i dekompozycjach separujących, a w szczególności Twierdzenie 2.5.

Zadanie 4. Przeczytać i zrozumieć sekcję 3 wyżej wymienionej pracy o dekompozycjach separujących i parach bliźniaczych drzew binarnych.

I na koniec powtórzenie niezrobionych zadań z poprzedniego zestawu.

3-*orientacja* triangulacji to skierowanie jej wewnętrznych krawędzi takie, że każdy wewnętrzny wierzchołek ma dokładnie 3 krawędzie wychodzące. Krawędzie zewnętrzne pozostają nieskierowane.
ccw - skierowanie przeciwne do wskazówek zegara
cw - skierowanie zgodnie ze wskazówkami zegara

Zadanie 5. Uzasadnij, że dla każdej 3-orientacji triangulacji G istnieją dokładnie trzy krawędziowe etykietowania Schnydera (wyznaczające ten sam podział na drzewa Schnydera), w których każda krawędź wewnętrzna jest skierowana zgodnie z 3-orientacją. Wskaż algorytm, który je wyznacza.

Zadanie 6. Niech $\mathcal{T}$ będzie 3-orientacją triangulacji G. Uzasadnij poniższe obserwacje.

(i) Jeśli C jest cyklem skierowanym w $\mathcal{T}$ i każda krawędź incydentna z wierzchołkiem w C i zawarta wewnątrz regionu otoczonego przez C jest skierowana (ze środka) do wierzchołka w C to C jest trójkątem.

(ii) Jeśli $\mathcal{T}$ zawiera skierowany cykl C to zawiera również skierowany w tym samym kierunku trójkąt "zawarty" regionie ograniczonym przez C.

Niech G będzie 4-spójną triangulacją, a $\mathcal{T}$ dowolną 3-orientacją G. Ściana f w G jest *flipowalna* jeśli wszystkie krawędzie brzegu f są skierowane ccw. Analogicznie f jest *flopowalna* jeśli wszystkie krawędzie brzegu f są skierowane cw.

Flip ściany f (flipowalnej) polega na zmianie kierunku wszystkich krawędzi f z ccw na cw. Flop sciany f (flopowalnej) polega na zmianie kierunku wszystkich krawędzi f z cw na ccw. Uzyskane w ten sposób nowe 3-orientacje będziemy oznaczać przez $\mathcal{T}_f$.

$(f_1, f_2, \ldots)$ jest *flip-ciągiem* jeśli ściana f_1 jest flipowalna w $\mathcal{T}$, f_2 jest flipowalna w $\mathcal{T}_{f_1}$, f_3 jest flipowalna w $\mathcal{T}_{f_1,f_2}$, itd. Analogicznie definiujemy *flop-ciąg*.

Zadanie 7. Niech G będzie 4-spójną triangulacją z 3-orientacją $\mathcal{T}$ i cyklem C skierowanym ccw. Niech c oznacza liczbę ścian w G zawartych wewnątrz C. Uzasadnij, że istnieje flip-ciąg S o długości c, taki, że $\mathcal{T}_S$ różni się od $\mathcal{T}$ jedynie skierowaniem wszystkich krawędzi na cyklu C.

Zadanie 8. Udowodnij, że każdy flip-ciąg S jest skończony.

Zadanie 9.

(i) Niech G będzie dowolną triangulacją, a $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ będą dwiema różnymi 3-orientacjami G. Udowodnij, że istnieje cykl C w G, który jest skierowany cw w jednej orientacji i przeciwnie w drugiej.

(ii) Niech G będzie dowolną triangulacją. Udowodnij, że istnieje co najwyżej jedna 3-orientacja nie zawierająca cyklu *ccw* oraz co najwyżej jedna 3-orientacja nie zawierająca cyklu *cw*.

(iii) Niech G będzie 4-spójną triangulacją. Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna 3-orientacja bez cykli ccw i dokładnie jedna orientacja bez cykli cw.