Posety

Piotr Micek

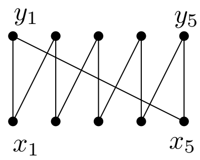
zestaw 4
semestr zimowy 2018/2019
Kraków, 31 października 2018

Wymiar i uogólnione liczby kolorujące

Zadanie 1. Niech P będzie posetem z planarnym diagramem, z zerem i z jedynką. Wykazać, że

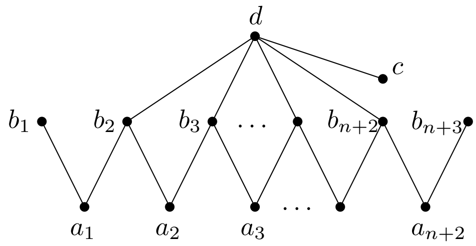
$$\dim(P) \leqslant 2.$$

Zadanie 2. *Korona* rzędu n ($n \geqslant 3$) to poset $2n$-elementowy $(\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}, \leqslant)$ w którym jedyne porównywalności to $x_i \leqslant y_i$ oraz $x_i \leqslant y_{i+1}$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ (cyklicznie). Patrz rysunek 1. Wykazać, że wymiar dowolnej korony jest równy 3.



Rysunek 1: Korona rzędu 5.

Zadanie 3. Jaki wymiar mają posety z rodziny narysowanej na rysunku 2?



Rysunek 2: Rodzina posetów $\{Q_n\}_{n \geqslant 0}$.

Zadanie 4. Na wykładzie widzieliśmy, że jeżeli P ma zewnętrznie planarny graf pokryć, to $\dim(P) \leqslant 4$. Znaleźć poset świadczący, że to ograniczenie jest najlepsze możliwe.

Zadanie 5. Niech T będzie drzewem. Na wykładzie widzieliśmy, że $\mathrm{wcol}_r(T) \leqslant r+1$. Dla dowolnego $r \geqslant 1$ znajdź drzewo T takie, że $\mathrm{wcol}_r(T) \geqslant r+1$.

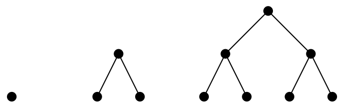
Zadanie 6. Niech T będzie pełnym drzewem binarnym. Patrz rysunek 3. Jaka jest najlepsza możliwa asymptotyka funkcji f takiej, że

$$\mathrm{wcol}_r(T) \leqslant f(r).$$

(Podać argument na ograniczenie z góry i z dołu.)

Zadanie 7. Krata $\boxplus_n$ to graf, którego zbiór wierzchołków to $\{(i,j) \mid i,j \in \{1,\ldots,n\}\}$, a dwa różne wierzchołki (i,j), (i',j') są połączone krawędzią jeśli $|i'-i|+|j'-j| = 1$. Jaka jest najlepsza asymptotyka funkcji f takiej, że

$$\mathrm{wcol}_r(\boxplus_n) \leqslant f(r)?$$



Rysunek 3: Trzy najmniejsze pełne drzewa binarne.

Niech G będzie grafem, a π permutacją $V(G)$. Dla $v \in V(G)$ i $r \geqslant 0$ mówimy, że $u \in V(G)$ jest *r-silnie osiągalny* z v w π jeśli istnieje ścieżka Q z v do u w G taka, że u jest najbardziej na lewo wierzchołkiem Q w π oraz wszystkie wewnętrzne wierzchołki Q są na prawo od v w π.

Definiujemy

$$\begin{aligned} \mathrm{SReach}_r^\pi &= \{u \in V(G) \mid u \text{ jest } r\text{-silnie osiągalny z } v \text{ w } \pi\}, \\ \mathrm{scol}_r(G) &= \min_\pi \max_{v \in V(G)} |\,\mathrm{SReach}_r^\pi(v)|. \end{aligned}$$

Zadanie 8. Wykazać, że dla każdego grafu G i dla każdego $r \geqslant 0$ zachodzi

$$\mathrm{scol}_r(G) \leqslant \mathrm{wcol}_r(G) \leqslant (\mathrm{scol}_r(G))^r\,.$$

Zadanie 9. Jaka jest najlepsza asymptotyka funkcji f takiej, że

$$\mathrm{scol}_r(\boxplus_n) \leqslant f(r)?$$

No i temat, który pozostał z poprzednich ćwiczeń ...

Zadanie 10. Przeczytać (na przykład na Wiki) o bipolarnej orientacji i *st*-orientacji. Wykazać, że graf ma pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy ma drugie. Dodatkowo, wykazać, że jeśli graf jest 2-spójny to posiada owe orientacje.

Kolejne dwa zadania są na dobrą sprawę prośbą o przeczytanie i zrozumienie kilku sekcji z pracy *Bijections for Baxter Families and Related Objects* autorstwa Felsnera i innych z 2011 roku (pdf).

Zadanie 11. Przeczytać i zrozumieć sekcję 2 wyżej wymienionej pracy o orientacjach bipolarnych i dekompozycjach separujących, a w szczególności Twierdzenie 2.5.

Zadanie 12. Przeczytać i zrozumieć sekcję 3 wyżej wymienionej pracy o dekompozycjach separujących i parach bliźniaczych drzew binarnych.
