Wymiar posetów planarnych

Zadanie 1. Niech P będzie posetem a P' będzie posetem otrzymanym z P poprzez dodanie dla każdego elementu $x \in P$: (1) elementu maksymalnego x' takiego, że $x < x'$, (2) elementu minimalnego x'' takiego, że $x'' < x$, oraz poprzez domknięcie przechodnie relacji na nowym (poszerzonym) zbiorze elementów. Wykazać, że

$$\dim(P) \leqslant \dim(\mathrm{Min}(P'), \mathrm{Max}(P')),$$

gdzie $\dim(X, Y) = \chi(\{(x, y) \in \mathrm{Inc}(P) \mid x \in X,\ y \in Y\})$.

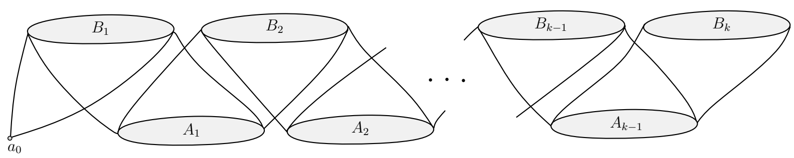
Zadanie 2 (to jest ciekawe zadanie i jeśli ktoś je zrobi to już nie musi robić nic innnego; na dobrą sprawę nie wiem czy to jest trudne)**.** Niech P będzie posetem z quasi-zerem, quasi-jeden, planarnym grafem pokryć oraz o wysokości co najwyżej h. Dla przypomnienia q_0 jest *quasi-zerem* w P jeśli dla dowolnego $x \in \mathrm{Max}(P)$ mamy $q_0 \leqslant x$ w P. Wykazać, że jeśli S_k jest standardowym przykładem rozmiaru k zawartym w P, to $k \leqslant f(h)$ dla pewnego wielomianu f. Spróbuj jak najbardziej zbić stopień tego wielomianu.

Potrzebujemy rozwiązania tego zadania aby domknąć dowód twierdzenia z wykładu. W kontekście tego twierdzenia możemy założyć trochę więcej ... Wystarczy ograniczyć długość ścieżki skierowanej w pomocniczym grafie na nieporównywalnych parach. (Widzieliśmy na wykładzie, że takie ścieżki formuują standardowy przykład.)

Niech $\dim^*(P) = \dim(\mathrm{Min}(P), \mathrm{Max}(P))$.

Zadanie 3 (to jest ciekawe i w sumie proste)**.** Rozważ następującą procedurę *rozwijajania* ustalonego posetu P. Niech a będzie elementem minimalnym w P i niech $A_0 = \{a\}$. Dla $i = 1, 2, \ldots$ niech

$$B_i = \{b \in \mathrm{Max}(P) - \bigcup_{1 \leqslant j < i} B_j \mid \text{istnieje } a \in A_{i-1} \text{ takie, że } a \leqslant b \text{ w } P\},$$
$$A_i = \{a \in \mathrm{Min}(P) - \bigcup_{0 \leqslant j < i} A_j \mid \text{istnieje } b \in B_i \text{ takie, że } a \leqslant b \text{ w } P\}.$$



Rysunek 1: Rozwijanie posetu.

Wykazać, że istnieje indeks i taki, że

$$\dim(A_i, B_i) \geqslant \dim^*(P)/2 \quad \text{lub} \quad \dim(A_i, B_{i+1}) \geqslant \dim^*(P)/2.$$

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnego $h \geqslant 1$ istnieje poset o planarnym diagramie i wysokości co najwyżej h taki, że

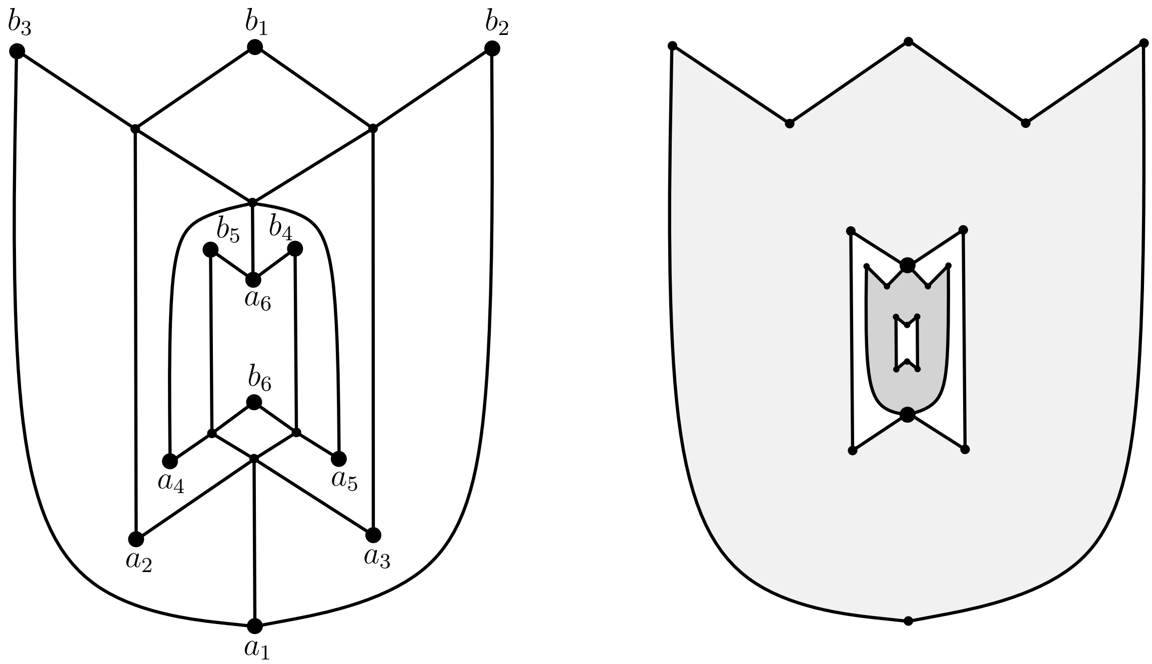
$$\dim(P) \geqslant (4/3)h - 2.$$

Wskazówka: Patrz rysunek 2.

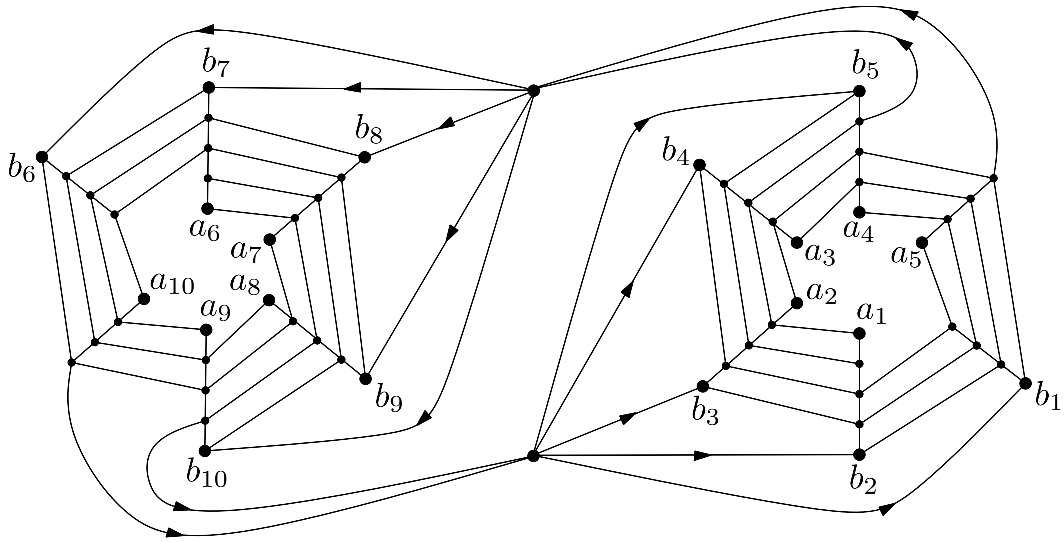
Zadanie 5. Wykazać, że dla dowolnego $h \geqslant 1$ istnieje poset o planarnym grafie pokryć i wysokości co najwyżej h taki, że

$$\dim(P) \geqslant 2h - 2.$$

Wskazówka: Patrz rysunek 3.



Rysunek 2: Iterative construction of planar posets with arbitrarily large dimension.



Rysunek 3: Construction of posets with planar cover graphs and large dimension.