

Posety

Wycinek z kursu Algorytmy Grafowe

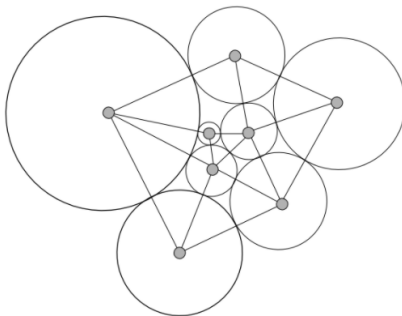


Katedra Algorytmiki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

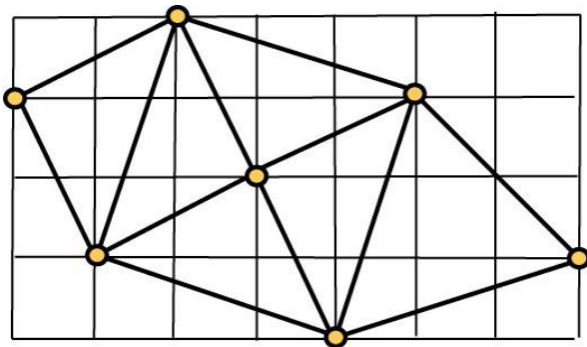
10 października 2018

Twierdzenie (Koebe, 1936)

Dla każdego grafu planarnego G istnieje reprezentacja taka, że jego wierzchołki są kołami (monetami) na płaszczyźnie, gdzie wnętrza narysowanych kół są parami rozłączne oraz dwa koła dotykają się wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im wierzchołki sąsiadują w G .



Zanurzenie grafu planarnego w grid



Zanurzenie grafu w grid

Frayssseix, Pach, Pollack, 1990	$2n - 4 \times n - 2$
Brandenburg, 2008	$\lceil \frac{4}{3}n \rceil \times \lceil \frac{2}{3}n \rceil$
Schnyder, 1989	$2n - 5 \times 2n - 5$
Schnyder, 1990	$n - 2 \times n - 2$
Zhang, He, 2005	$n - 2 - \delta \times n - 2 - \delta$ gdzie $0 \leq \delta \leq \frac{n-1}{2}$ zależy od grafu

Zanurzenie grafu w grid

Jeśli chcemy minimalizować **pole gridu** to ...

	ograniczenie dolne	ograniczenie górne	
planarne	$\frac{4}{9}n^2 - O(n)$	$\frac{8}{9}n^2 + O(n)$	[1,2,3]
4-spójne pl.	$\lfloor n/2 \rfloor \times (\lceil n/2 - 1 \rceil)$		[4]
drzewa	$\Omega(n)$	$O(n \log n)$	[5]

- 1 Fraysseix, Pach, Pollack (1990)
- 2 Brandenburg (2008)
- 3 Mondal, Nishat, Rahman, Alam (2011)
- 4 Miura, Nakano, Nishizeki (2001)
- 5 Crescenzi, Battista, Piperno (1992)

Oznaczenia

Niech $G = (V, E)$ będzie triangulacją ze ścianą zewnętrzną v_0, v_1, v_2 (wierzchołki ponumerowane zgodnie ze wskazówkami zegara).

Wówczas:

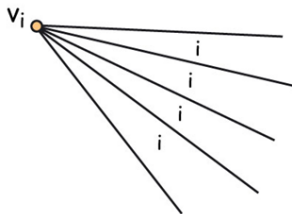
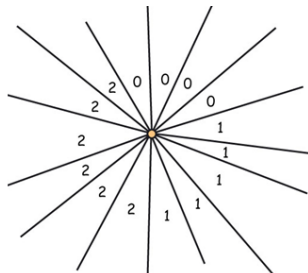
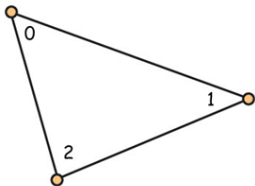
- Wierzchołki v_0, v_1, v_2 nazywamy **wierzchołkami zewnętrznymi**.
- Krawędzie $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_1, v_2)$ nazywamy **krawędziami zewnętrznymi**.
- Pozostałe wierzchołki/krawędzie nazywamy **wierzchołkami/krawędziami wewnętrznymi**.

Definicja

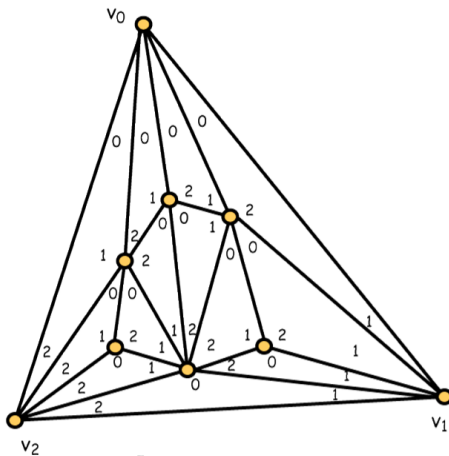
Kątowym etykietowaniem Schnydera triangulacji $G = (V, E)$ ze ścianą zewnętrzną $\{v_0, v_1, v_2\}$ nazywamy funkcję $e : K(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ taką, że:

- $K(G)$ - zbiór kątów grafu G ;
- Dla każdej ściany wewnętrznej f , etykietami kątów incydentnych z f (zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara) są $\{0, 1, 2\}$;
- Dla każdego wierzchołka wewnętrznego v , etykiety kątów incydentnych z v (zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara) tworzą niepusty przedział 0, następnie niepusty przedział 1, a następnie niepusty przedział 2;
- Kąty incydentne z v_i są etykietowane przez i .

Kątowe etykietowanie Schnydera



Kątowe etykietowanie Schnydera



Twierdzenie

Każda triangulacja ma kątowe etykietowanie Schnydera.

Dowód

Niech $G = (V, E)$ będzie triangulacją.

Indukcja po $|V|$.

Dla $|V| = 3$ każdemu z trzech kątów dajemy etykietę zgodnie z definicją etykietowania.

Niech $|V| > 3$. Rozpatrzmy 2 przypadki:

- Istnieje trójkąt separujący T w G .

Definicja:

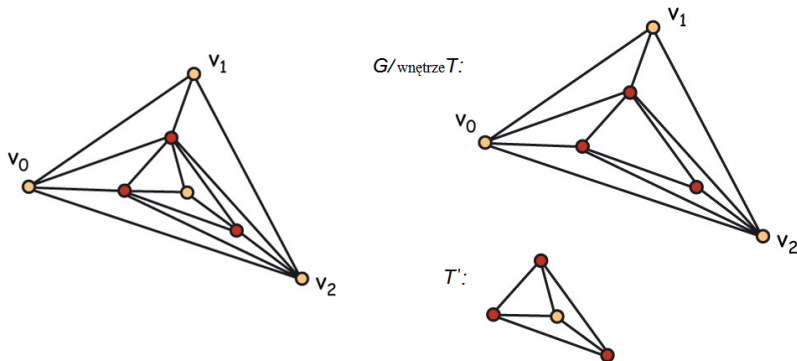
Trójkąt $T = \{x, y, z\} \subset G$ jest separujący $\Leftrightarrow G \setminus T$ jest niespójny.

- Nie istnieje trójkąt separujący w G .

Kątowe etykietowanie Schnydera

Przypadek 1: Istnieje trójkąt separujący T w G .

Niech $T' = T \cup$ "wnętrze" trójkąta T .



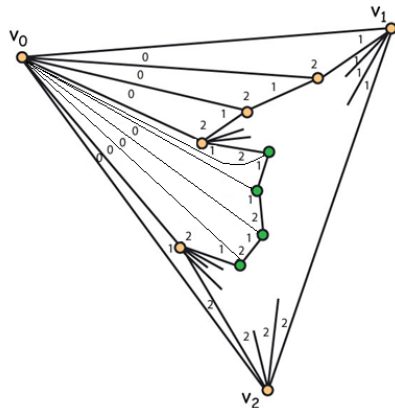
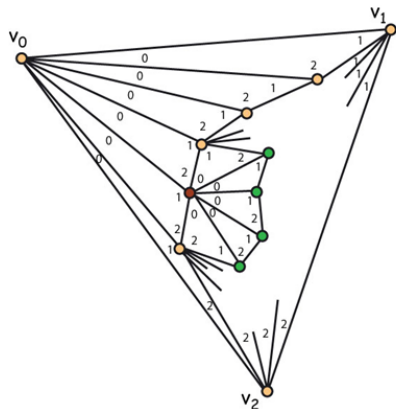
- Istnieje kątowe etykietowanie Schnydera π_1 dla $G \setminus \text{wnętrze } T$.
- Istnieje kątowe etykietowanie Schnydera π_2 dla T' .
- Przepermutowujemy π_1 i π_2 tak, aby je uzgodnić i łączymy je w jedno etykietowanie.

Kątowe etykietowanie Schnydera

Przypadek 2: Nie istnieje trójkąt separujący w G .

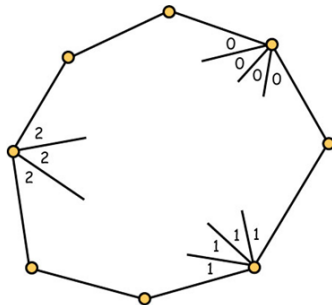
- Sąsiedzi wierzchołka v_0 tworzą ścieżkę o końcach w v_1 i v_2 :
 $v_1 = w_1, w_2, \dots, w_k = v_2$.
- Jedynym skrótem na tej ścieżce jest krawędź (v_1, v_2) , w przeciwnym razie uzyskalibyśmy trójkąt separujący.
- Wybieramy dowolny wierzchołek $x = w_i$ różny od v_1, v_2 (istnieje taki bo $|V| > 3$).
- Konstruujemy krawędź (v_0, x) uzyskując graf G' .
- G' nie jest multigrafem, bo nasza ścieżka nie ma skrótów.
- Z indukcji G' ma etykietowanie Schnydera, wyznaczamy je.
- Rozszerzamy etykietowanie G' na etykietowanie G .

Kątowe etykietowanie Schnydera



Lemat o jednorodnych kątach

Niech $C \subset G$ będzie cyklem w triangulacji G , dla którego ustalone jest etykietowanie Schnydera. Wówczas dla każdego $i \in \{0, 1, 2\}$ istnieje $v \in C$ taki, że wszystkie jego kąty w C są etykietowane przez i (wierzchołek v nazywamy **jednorodnym**).



Kątowe etykietowanie Schnydera

Dowód:

Indukcja po liczbie ścian wewn.

Jeśli C jest ścianą (trójkątem), to z def. etykietowania, każdy z trzech kątów jest jednorodny i ma inną etykietę.

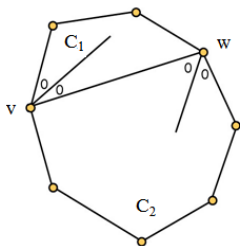
Niech C - dowolny cykl. Niech C nie ma jednorodnego wierzchołka 0.

Przypadek 1: Cykl C ma cięciwę (v, w) .

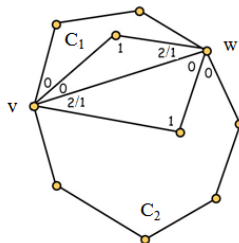
Z zał., mniejsze cykle C_1 i C_2 mają wierzchołki jednorodne o numerze 0.

Są nimi v i w (inaczej C ma wierzchołek jednorodny o numerze 0).

Ale wówczas etykiety trójkątów oparte na krawędzi (v, w) nie są zgodne z warunkami etykietowania.



Posety



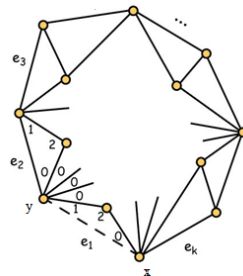
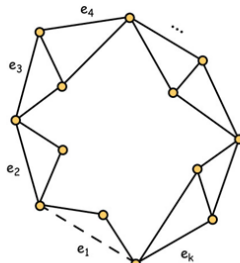
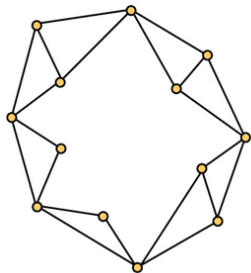
Iwona Cieřlik, Piotr Micek

Kątowe etykietowanie Schnydera

Przypadek 2: Cykl C nie ma cięciwy.

Dla każdego $e_i = (x, y) \in C$, istnieje $z \in V$, wewnątrz cyklu C , taki, że x, y, z tworzą trójkąt.

Cykl $C \setminus e_1 = (x, y)$ ma mniej ścian wewn., zatem ma wierzchołek jednorodny 0. Jest nim x lub y . Niech będzie nim y . Etykietowanie y wymusza etykiety trójkątów opartych na e_1 i e_2 (patrz rysunek).



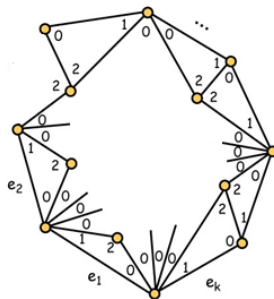
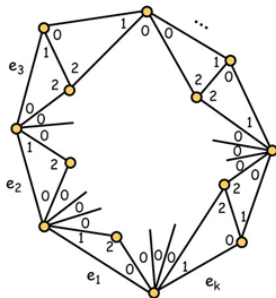
Kątowe etykietowanie Schnydera

Przypadek 2 cd

Powtarzamy powyższy argument dla $e_2, \dots, e_k$ i etykietujemy kąty uzyskanych trójkątów.

Usuwaemy z C dowolną krawędź uzyskując cykl o mniejszej liczbie ścian. Nie ma on jednorodnego wierzchołka etykietowanego przez 2.

Sprzeczność.

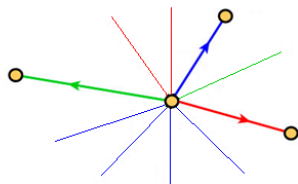


Definicja

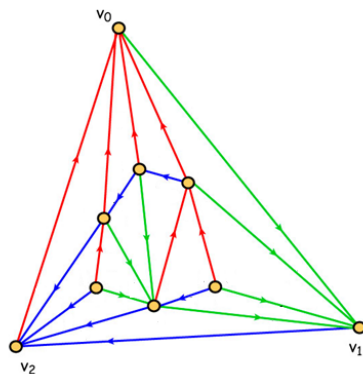
Krawędziowym etykietowaniem Schnydera triangulacji $G = (V, E)$ o ścianie zewnętrznej $\{v_0, v_1, v_2\}$ nazywamy funkcję $e : E \rightarrow \{0, 1, 2\}$ i skierowanie krawędzi grafu takie, że:

- dla każdego wierzchołka wewn. v , $\deg_{out}(v) = 3$
- dla każdego wierzchołka zewn. v , $\deg_{out}(v) = 1$,
- Krawędzie wchodzące do v_i są etykietowane przez i .
- Dla każdego wierzchołka wewnętrznego porządek krawędzi (zgodny ze wskazówkami zegara) jest następujący:
krawędź wychodząca 0, krawędzie wchodzące 2 (o ile są),
krawędź wychodząca 1, krawędzie wchodzące 0 (o ile są),
krawędź wychodząca 2, krawędzie wchodzące 1 (o ile są).

Krawędziowe etykietowanie Schnydera



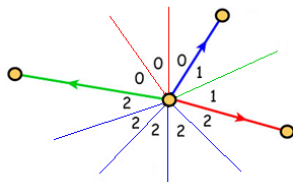
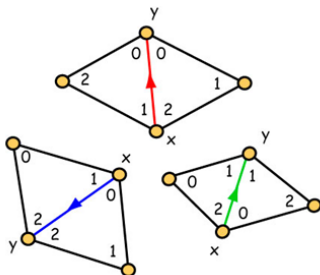
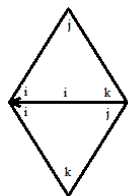
- 0 - krawędzie czerwone
- 1 - krawędzie zielone
- 2 - krawędzie niebieskie



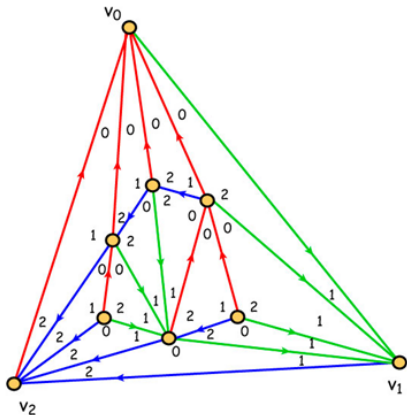
Etykietowania Schnydera

Lemat

- Kątowe etykietowanie Schnydera indukuje krawędziowe etykietowanie Schnydera.
- Krawędziowe etykietowanie Schnydera indukuje kątowe etykietowanie Schnydera.



Etykietowania Schnydera



Ścieżki i regiony

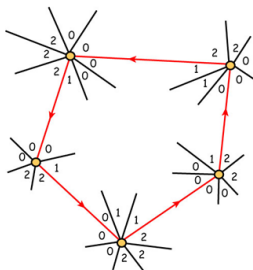
Niech $P_i(v)$ - maksymalna (i jedyna) ścieżka wychodząca z v o kolorze i .

Lemat

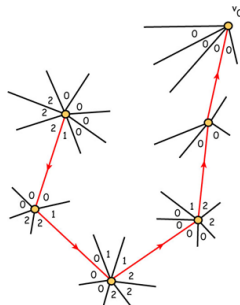
Dla każdego wierzchołka $v \in G$, ścieżka $P_i(v)$ jest ścieżką prostą (nie zawiera cyklu) i kończy się w wierzchołku v_i ($i = \{0, 1, 2\}$).

Jeśli $P_i(v)$ zawiera cykl, to nie ma on jednorodnego kąta $i + 2 \pmod{3}$.
Sprzeczność.

Dla $i = 0$



Posety



Iwona Cieřlik, Piotr Micek

Wniosek

Niech T_i - zbiór krawędzi etykietowanych przez i .

Wówczas T_i jest drzewem o korzeniu v_i zawierającym wszystkie wierzchołki G za wyjątkiem jednego wierzchołka zewnętrznego.

Trójkę drzew (T_0, T_1, T_2) nazywamy **drzewami Schnydera**.

Zatem $a(G) \leq 3$!

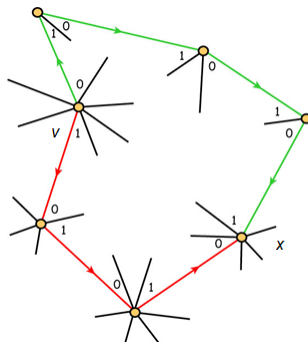
Ścieżki i regiony

Lemat

Dla każdego wierzchołka $x \in G$, $P_0(x) \cap P_1(x) \cap P_2(x) = \{x\}$.

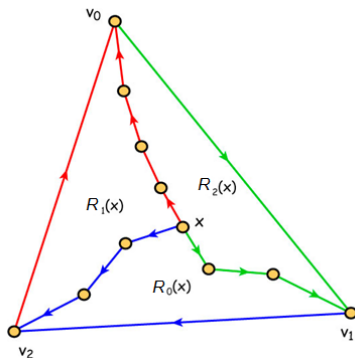
Jeśli $y \in P_0(x) \cap P_1(x)$ i $y \neq x$, to cykl $x \rightsquigarrow y \cup y \rightsquigarrow x$ nie ma jednorodnego kąta 2. Sprzeczność.

Pozostałe przypadki - analogicznie.



Ścieżki i regiony

Niech $R_i(v)$ - region ograniczony przez $P_{i+1}(v)$, $P_{i-1}(v)$ oraz krawędź zewnętrzną (v_{i+1}, v_{i-1}) (indeksy liczymy modulo 3).

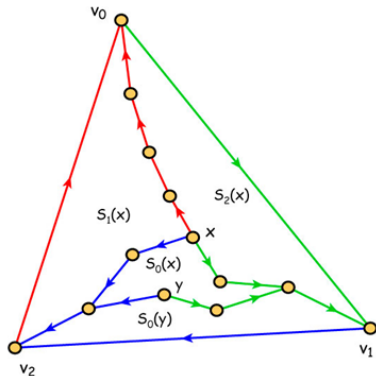


Ścieżki i regiony

Lemat

Niech $x, y \in G$, takie, że $x \neq y$.

Jeśli $y \in R_i(x)$, to $R_i(y) \subset R_i(x)$.



Ścieżki i regiony

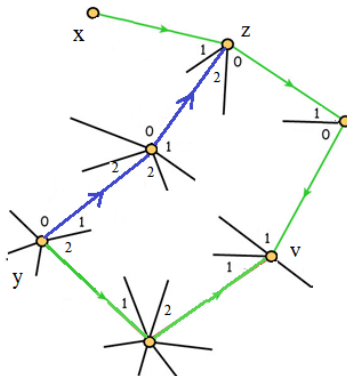
Dowód

Pokażemy, że ścieżka $P_{i+1}(y)$ nie przecina $P_i(x)$.

Niech $v = P_i(y) \cap P_i(x)$.

Jeśli $P_{i+1}(y)$ przecina $P_i(x)$ w punkcie z , to cykl $y \rightsquigarrow z \cup z \rightsquigarrow v \cup y \rightsquigarrow v$ nie ma jednorodnego kąta $i+1$, ani $i-1$. Sprzeczność.

Dla $i = 1$



Definicja

Posetem incydencji $P(G)$ nieskierowanego grafu $G = (V, E)$ nazywamy zbiór częściowo uporządkowany $(S = V \cup E, <)$ taki, że $x < y \Leftrightarrow x \in V, y \in E$ i x jest jednym z końców krawędzi y .

Definicja

Wymiarem częściowo uporządkowanego zbioru $(S, <)$, $\dim(S)$ nazywamy najmniejszą liczbę liniowych porządków $<_1 \dots <_k$, takich, że ich część wspólna daje częściowy porządek $<$.

Twierdzenie Schnydera

Twierdzenie Schnydera

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy $\dim(P(G)) \leq 3$.

Dowód $\Rightarrow$:

- $\forall i = 0, 1, 2$ definiujemy liniowy porządek $<_i$ na wierzchołkach $v \in V$ indukowany przez zawieranie regionów $R_i(v)$.
- $\forall e = (x, y) \in E$, wkładamy e do porządku $<_i$ najniżej jak to możliwe, tzn. tak, aby $x <_i e$, $y <_i e$ i $\forall z > x, y \quad z > e$.
- Iloczynem porządków $<_i$ jest poset incydencji $P(G) = (V \cup E, <)$.
Niech $e = (x, y) \in E$, $z \in V$: $z \notin \{x, y\}$
 - $\forall i \quad x, y <_i e$, zatem $x, y < e$
 - $\exists i \quad x, y <_i z$, zatem $e <_i z$
 - $\exists j \quad z <_j x$, zatem $z <_j e$
 - $x < e \Leftrightarrow x$ jest końcem krawędzi e
- $\dim(P(G)) \leq 3$

Twierdzenie Schnydera

Dowód $\Leftarrow$:

Przypuśćmy, że $\dim(P(G), <) \leq 3$ i graf nie jest planarny.

Weźmy 3 porządki takie, że $u < v \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, 3 \ u <_i v$.

Wyberzmy zanurzenie posetu $f : v \in P(G) \rightarrow (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ takie, że $u < v \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, 3 \ u_i < v_i$ w $\mathbb{R}$.

Niech π będzie rzutowaniem zanurzenia $P(G)$ na płaszczyznę $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ w $\mathbb{R}^3$.

Możemy założyć, że $\forall a \neq b \in V \cup E \quad \pi(a) \neq \pi(b)$.

Dla każdego $e \in E$ i $v \in V$ łączymy odcinkiem punkty $\pi(v)$ z $\pi(e)$.

Jeśli G nie jest planarny, to istnieją różne wierzchołki u, v i różne krawędzie e, f takie, że

- u jest końcem e i nie jest końcem f ,
- v jest końcem f i nie jest końcem e ,
- odcinki $\overline{\pi(u)\pi(e)}$ $\overline{\pi(v)\pi(f)}$ przecinają się.

Twierdzenie Schnydera

Dowód $\Leftarrow$:

Niech p będzie punktem przecięcia $\overline{\pi(u)\pi(e)}$ i $\overline{\pi(v)\pi(f)}$.

Niech z będzie punktem $\in \overline{ue}$ takim, że $\pi(z) = p$.

Niech w będzie punktem $\in \overline{vf}$ takim, że $\pi(w) = p$.

Wówczas $z \leq w$ lub $w \leq z$ w $\mathbb{R}^3$.

- $z \leq w \Rightarrow u < z \leq w < f \Rightarrow u$ jest końcem f . Sprzeczność.
- $w \leq z \Rightarrow v < w \leq z < e \Rightarrow v$ jest końcem e . Sprzeczność.

Zatem rzut na płaszczyznę $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ jest zanurzeniem planarnym.