

krótka igła

Probabil, informatyka analityczna 8 grudnia 2023 r.
Uniwersytet Jagielloński
Jędrzej Hodor, Piotr Micek

ℓ długość igły

d szerokość deski

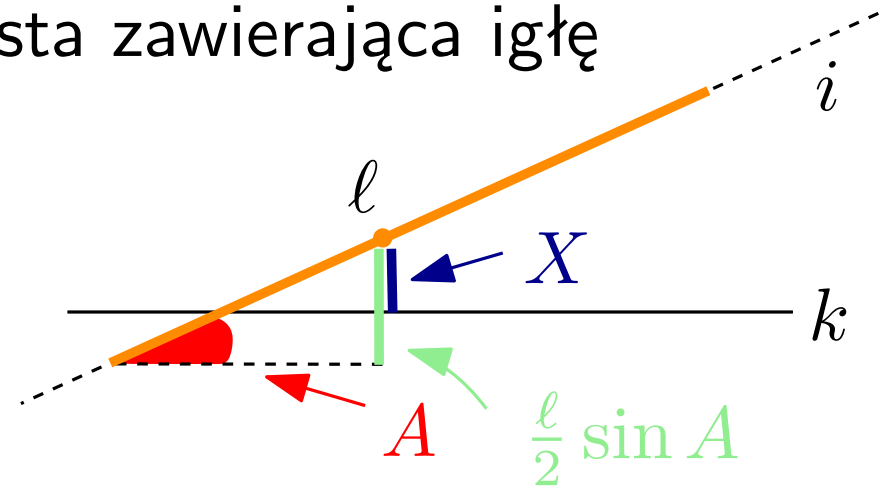
$$\ell \leq d$$

k najbliższa prosta od środka igły

i prosta zawierająca igłę

X odległość środka igły od k
 $U[0, \frac{d}{2}]$

A ostry kąt pomiędzy k i i
 $U[0, \frac{\pi}{2}]$



krótka igła

Probabil, informatyka analityczna 8 grudnia 2023 r.
Uniwersytet Jagielloński
Jędrzej Hodor, Piotr Micek

ℓ długość igły

d szerokość deski

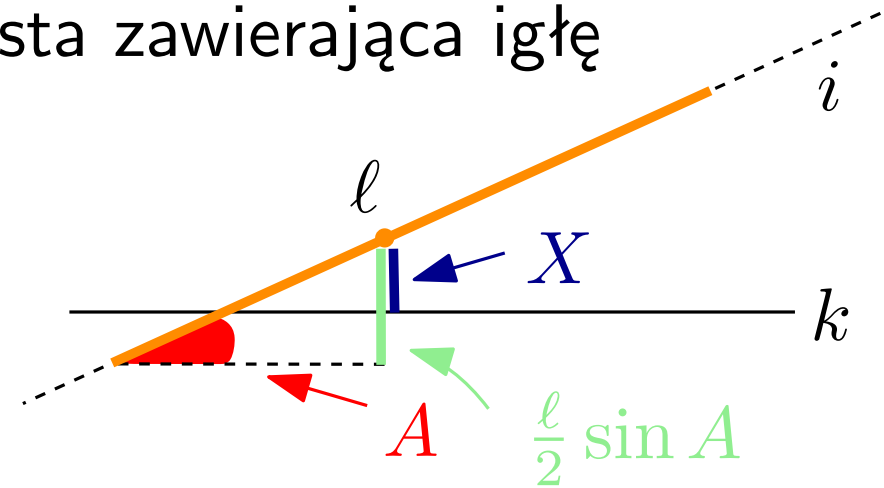
$$\ell \leq d$$

k najbliższa prosta od środka igły

i prosta zawierająca igłę

X odległość środka igły od k
 $U[0, \frac{d}{2}]$

A ostry kąt pomiędzy k i i
 $U[0, \frac{\pi}{2}]$



igła przecina krawędź $\equiv X \leq \frac{\ell}{2} \sin A$

$Z = \{(x, \alpha) \mid x \in [0, \frac{d}{2}), \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha\}$

$P(\text{igła przetnie krawędź}) = P((X, A) \in Z)$

krótka igła

Probabil, informatyka analityczna 8 grudnia 2023 r.
Uniwersytet Jagielloński
Jędrzej Hodor, Piotr Micek

ℓ długość igły

d szerokość deski

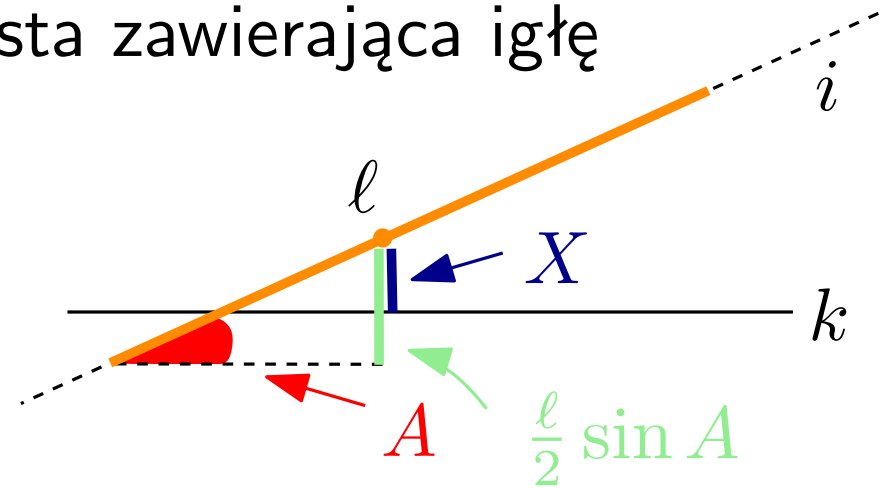
$$\ell \leq d$$

k najbliższa prosta od środka igły

i prosta zawierająca igłę

X odległość środka igły od k
 $U[0, \frac{d}{2}]$

A ostry kąt pomiędzy k i i
 $U[0, \frac{\pi}{2}]$



igła przecina krawędź $\equiv X \leq \frac{\ell}{2} \sin A$

$Z = \{(x, \alpha) \mid x \in [0, \frac{d}{2}), \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha\}$

$P(\text{igła przetnie krawędź}) = P((X, A) \in Z)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\ell}{2} \sin \alpha} \frac{2}{d} \cdot \frac{2}{\pi} dx d\alpha = \frac{4}{d\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2} \sin \alpha d\alpha$$

$$= \frac{2\ell}{\pi d} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\ell}{\pi d} (-0 + 1) = \frac{2\ell}{\pi d}$$

krótka igła

ℓ długość igły

d szerokość deski

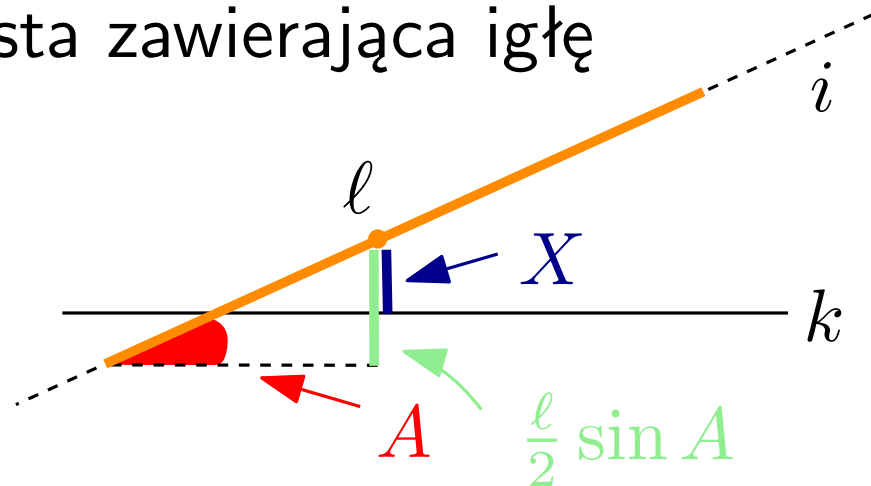
$$\ell \leq d$$

k najbliższa prosta od środka igły

i prosta zawierająca igłę

X odległość środka igły od k
 $U[0, \frac{d}{2}]$

A ostry kąt pomiędzy k i i
 $U[0, \frac{\pi}{2}]$



igła przecina krawędź $\equiv X \leq \frac{\ell}{2} \sin A$

$Z = \{(x, \alpha) \mid x \in [0, \frac{d}{2}), \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], x \leq \frac{\ell}{2} \sin A\}$

$P(\text{igła przetnie krawędź}) = P((X, A) \in Z)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\ell}{2} \sin \alpha} \frac{2}{d} \cdot \frac{2}{\pi} dx d\alpha = \frac{4}{d\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2} \sin \alpha d\alpha \quad \forall \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{\ell}{2} \sin \alpha \leq \frac{d}{2}$$

$$= \frac{2\ell}{\pi d} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\ell}{\pi d} (-0 + 1) = \frac{2\ell}{\pi d}$$

długa igła

ℓ długość igły

d szerokość deski

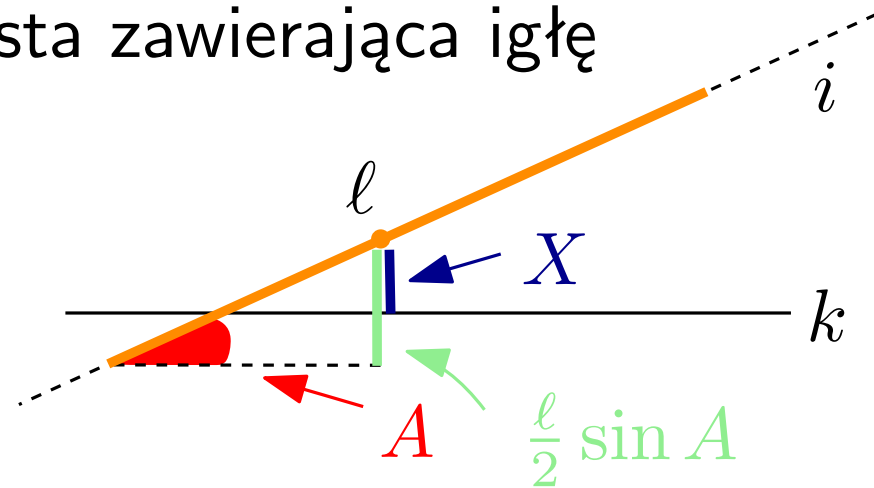
$$\ell \geq d$$

k najbliższa prosta od środka igły

i prosta zawierająca igłę

X odległość środka igły od k
 $U[0, \frac{d}{2}]$

A ostry kąt pomiędzy k i i
 $U[0, \frac{\pi}{2}]$



igła przecina krawędź $\equiv X \leq \frac{\ell}{2} \sin A$

$Z = \{(x, \alpha) \mid x \in [0, \frac{d}{2}), \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha\}$

$P(\text{igła przetnie krawędź}) = P((X, A) \in Z)$

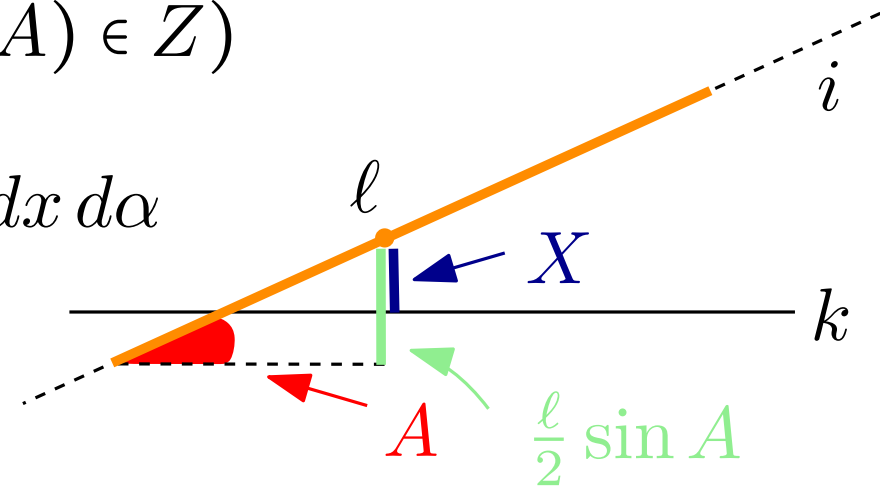
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} \chi \left\{ x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha \right\} \cdot \frac{2}{d} \cdot \frac{2}{\pi} dx d\alpha$$

długa igła

$$Z = \left\{ (x, \alpha) \mid x \in \left[0, \frac{d}{2}\right), \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha \right\}$$

$$P(\text{igła przecnie krawędź}) = P((X, A) \in Z)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} \chi \left\{ x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha \right\} \cdot \frac{2}{d} \cdot \frac{2}{\pi} dx d\alpha$$



długa igła

$$Z = \left\{ (x, \alpha) \mid x \in \left[0, \frac{d}{2}\right), \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha \right\}$$

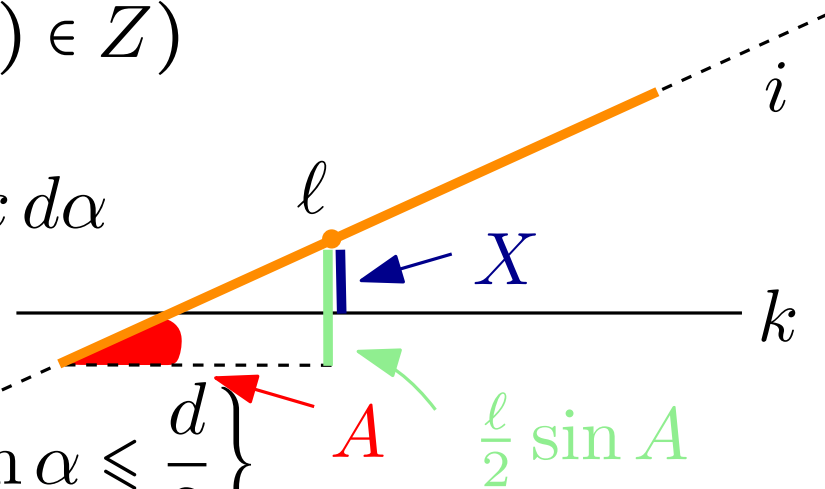
$$P(\text{igła przecnie krawędź}) = P((X, A) \in Z)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} \chi \left\{ x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha \right\} \cdot \frac{2}{d} \cdot \frac{2}{\pi} dx d\alpha$$

$$= \frac{4}{\pi d} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} \chi \left\{ x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha, \frac{\ell}{2} \sin \alpha \leq \frac{d}{2} \right\} \right. \\ \left. + \chi \left\{ x \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha, \frac{d}{2} \leq \frac{\ell}{2} \sin \alpha \right\} dx d\alpha \right)$$

$$= \frac{4}{\pi d} \left(\int_0^{\arcsin \frac{d}{\ell}} \int_0^{\frac{\ell}{2} \sin \alpha} dx d\alpha + \int_{\arcsin \frac{d}{\ell}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} dx d\alpha \right)$$

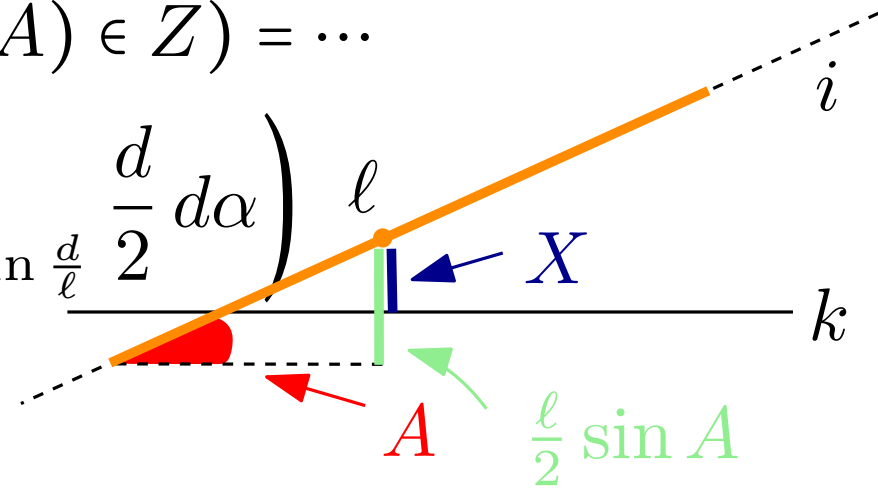
$$= \frac{4}{\pi d} \left(\int_0^{\arcsin \frac{d}{\ell}} \frac{\ell}{2} \sin \alpha d\alpha + \int_{\arcsin \frac{d}{\ell}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{2} d\alpha \right)$$



długa igła

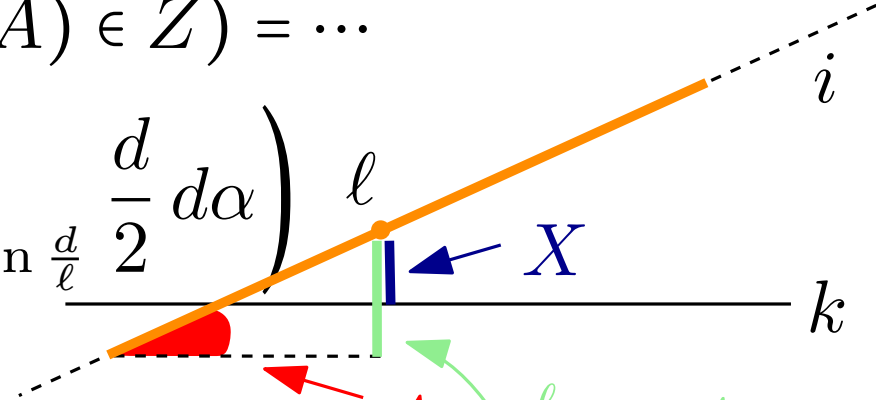
$$P(\text{igła przetnie krawędź}) = P((X, A) \in Z) = \dots$$

$$= \frac{4}{\pi d} \left(\int_0^{\arcsin \frac{d}{\ell}} \frac{\ell}{2} \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\arcsin \frac{d}{\ell}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{2} \, d\alpha \right)$$



długa igła

$$P(\text{igła przecnie krawędź}) = P((X, A) \in Z) = \dots$$

$$= \frac{4}{\pi d} \left(\int_0^{\arcsin \frac{d}{\ell}} \frac{\ell}{2} \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\arcsin \frac{d}{\ell}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{2} \, d\alpha \right)$$


$$= \frac{4}{\pi d} \left(\frac{\ell}{2} (-\cos \alpha) \Big|_0^{\arcsin \frac{d}{\ell}} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{d}{\ell} \right) \frac{d}{2} \right)$$

$$= \frac{4}{\pi d} \left(\frac{\ell}{2} \left(-\sqrt{1 - \left(\frac{d}{\ell} \right)^2} + 1 \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{d}{\ell} \right) \frac{d}{2} \right)$$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$