Probabil

Zestaw 1
Semestr zimowy 2023/2024
Kraków, 11 października 2023

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE
Jagiellonian University

Aksjomaty, niezależność, wartość oczekiwana

Ω - przestrzeń zdarzen elementarnych
$\mathcal{F}$ - σ-ciało nad Ω

Miara probabilistyczna P na $(\Omega, \mathcal{F})$ jest funkcją $P : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ taką, że

- $P(\Omega) = 1$,
- jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zbiorów parami rozłącznych to $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy *przetrzenią probabilistyczną*.

Zadanie 1. Wyprowadź z aksjomatów kolejne własności przestrzeni probabilistycznej:

(i) $P(\emptyset) = 0$,
(ii) $P(A') = 1 - P(A)$,
(iii) jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
(iv) jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leqslant P(B)$,
(v) $P(A) \leqslant 1$,
(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Zadanie 2. Jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń, czyli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ to

$$P\left(\bigcup A_n\right) = \lim P\left(A_n\right).$$

I analogicznie. Jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zdarzeń, czyli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ to

$$P\left(\bigcap A_n\right) = \lim P(A_n).$$

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnego ciągu zdarzeń $\{A_n\}$ zachodzi

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Zadanie 4. Niech $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie nieskończonym ciągiem zdarzeń i niech $P(A_n) = 1$ dla każdego n. Dowiedź, że $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Zadanie 5. Podaj przykład zdarzeń X, Y, Z, takich że każde dwa są niezależne ale cała trójka nie jest niezależna. Podaj przykład $n + 1$ zdarzeń takich, że każde n z nich są niezależne ale wszystkie $n + 1$ są zależne.

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to zdarzenia $A_1{}', \ldots, A_n{}'$ (tj. dopełnienia odpowiednich zdarzeń) także są.

Zadanie 7. Załóżmy, że $A_1, A_2, \ldots$ są zdarzeniami w ustalonej przestrzeni oraz $P(A_n') \leqslant \frac{1}{3^n}$ dla każdego n. Uzasadnij, że

$$P\left(\bigcap A_n\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Zadanie 8. Niech $q \in \{0,1\}^{19}$ będzie arbitralnie wybranym 19-elementowym ciągiem zer i jedynek. Rzucamy wielokrotnie symetryczną monetą (tj. taką że orzeł i reszka wypadają z jednakowym prawdopodobieństwem) i notujemy rezultaty tworząc w ten sposób ciąg. Jeśli wypadł orzeł notujemy 0, jeśli reszka 1. Jakie jest prawdopodobieństwo że ciąg q wystąpi (po być może wielu rzutach) jako spójny podciąg notowanego ciągu?

Zadanie 9 (Spacer losowy z dwiema barierami)**.** Startujemy doświadczenie z liczbą k ($0 \leqslant k \leqslant n$). Barierami są liczby 0 i n. Dopóki aktualna liczba nie jest jedną z barier do aktualnej liczby dodajemy 1 lub -1 z równym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w którąś z barier? Jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w n?

Zadanie 10. W urnie znajdują się dwie kule: jedna czarna i jedna biała. W każdej z $n-2$ rund losujemy w sposób jednostajny jedną kulę z urny i dokładamy do urny kulę o tym samym kolorze co wylosowana. Pokaż, że liczba białych kul w urnie na końcu jest z jednakowym prawdopodobieństwem jedną z liczb ze zbioru $\{1,\dots,n-1\}$.

Zadanie 11 (Bratobójczy pojedynek)**.** Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze walczą w systemie turniejowym (jakże by inaczej?). Uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Drabinka turnieju jest układana losowo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkają się w pojedynku?

Zadanie 12. Dana jest moneta asymetryczna, która z nieznanym Ci prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$ zwraca orła i z prawdopodobieństwem $1-p$ zwraca reszkę. Zaproponuj algorytm który będzie symulował zachowanie monety symetrycznej, tj. z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zwróci orła bądź reszkę. Jedyne co możesz robić to rzucać monetą asymetryczną i na bazie obserwowanych rezultatów kontynuować rzucanie, bądź przerwać i zwrócić wynik. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów monetą asymetryczną przed zwróceniem wyniku? Wynik podaj jako funkcję p.

Liniowość wartości oczekiwanej

Zadanie 13. Każdy z n graczy rzuca niezależnie od pozostałych kostką.

(i) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje 1 punkt. Znajdź wartość oczekiwaną.
(ii) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje tyle punktów ile wyrzucili. Znajdź wartość oczekiwaną.

Zadanie 14. Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1,\dots,n\}$. Punkt stały permutacji π to taki x, że $\pi(x) = x$. Wyznacz oczekiwaną liczbę punktów stałych permutacji π.

Zadanie 15. Inwersja w permutacji π to para indeksów $i < j$ taka że $\pi(i) > \pi(j)$. Wyznacz oczekiwaną liczbę inwersji losowej permutacji π zbioru $\{1,\dots,n\}$.

Zadanie 16. n osób ($n \geqslant 4$) usiadło formując okrąg. Każda osoba w sposób losowy wybrała sąsiada. Jaka jest oczekiwana liczba osób niewybranych przez nikogo? A jaka jest odpowiedź jeśli te osoby siedzą w linii (czyli skrajne osoby mają tylko jednego sąsiada)?