Probabil

Zestaw 1
Semestr zimowy 2021/2022
Kraków, 11 października 2021

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE
Jagiellonian University

Aksjomaty, niezależność

Ω - przestrzeń zdarzen elementarnych
$\mathcal{F}$ - σ-ciało nad Ω

Miara probabilistyczna P na $(\Omega, \mathcal{F})$ jest funkcją $P : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ taką, że

* $P(\Omega) = 1$,
* jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zbiorów parami rozłącznych to $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy *przetrzenią probabilistyczną*.

Ćwiczenie 1. Wyprowadź z aksjomatów kolejne własności przestrzeni probabilistycznej:

(i) $P(\emptyset) = 0$,
(ii) $P(A') = 1 - P(A)$,
(iii) jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
(iv) jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leqslant P(B)$,
(v) $P(A) \leqslant 1$,
(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ćwiczenie 2. Jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń, czyli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ to

$$P\left(\bigcup A_n\right) = \lim P\left(A_n\right).$$

I analogicznie. Jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zdarzeń, czyli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ to

$$P\left(\bigcap A_n\right) = \lim P(A_n).$$

Ćwiczenie 3. Udowodnij, że dla dowolnego ciągu zdarzeń $\{A_n\}$ zachodzi

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Ćwiczenie 4. Niech $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie nieskończonym ciągiem zdarzeń i niech $P(A_n) = 1$ dla każdego n. Dowiedź, że $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Ćwiczenie 5. Podaj przykład zdarzeń X, Y, Z, takich że każde dwa są niezależne ale cała trójka nie jest niezależna.

Podaj przykład $n+1$ zdarzeń takich, że każde n z nich są niezależne ale wszystkie $n+1$ są zależne.

Ćwiczenie 6. Pokaż, że jeśli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są łącznie niezależne, to zdarzenia ${A_1}', \ldots, {A_n}'$ (tj. dopełnienia odpowiednich zdarzeń) także są.

Ćwiczenie 7. Załóżmy, że $A_1, A_2, \ldots$ są zdarzeniami w ustalonej przestrzeni oraz $P(A'_n) \leqslant \frac{1}{3^n}$ dla każdego n. Uzasadnij, że

$$P\left(\bigcap A_n\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ćwiczenie 8. W urnie znajdują się dwie kule: jedna czarna i jedna biała. W każdej z $n-2$ rund losujemy w sposób jednostajny jedną kulę z urny i dokładamy do urny kulę o tym samym kolorze co wylosowana. Pokaż, że liczba białych kul w urnie na końcu jest z jednakowym prawdopodobieństwem jedną z liczb ze zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$.

Ćwiczenie 9 (Spacer losowy z dwiema barierami)**.** Startujemy doświadczenie z liczbą k $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Barierami są liczby 0 i n. Dopóki aktualna liczba nie jest jedną z barier do aktualnej liczby dodajemy 1 lub -1 z równym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w którąś z barier? Jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w n?