Probabil

Zestaw 2
Semestr zimowy 2021/2022
Kraków, 19 października 2021

Proste eksperymenty, niezależność

Zadanie 1. Niech $q \in \{0,1\}^{19}$ będzie arbitralnie wybranym 19-elementowym ciągiem zer i jedynek. Rzucamy wielokrotnie symetryczną monetą (tj. taką że orzeł i reszka wypadają z jednakowym prawdopodobieństwem) i notujemy rezultaty tworząc w ten sposób ciąg. Jeśli wypadł orzeł notujemy 0, jeśli reszka 1. Jakie jest prawdopodobieństwo że ciąg q wystąpi (po być może wielu rzutach) jako spójny podciąg notowanego ciągu? [W rozwiązaniu tego zadania zwróć szczególną uwagę na to aby rozumowanie było nieskazitelne formalnie.]

Zadanie 2. Niech T będzie dowolnym drzewem z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami: startowym i końcowym. Pionek w sposób losowy porusza się po drzewie rozpoczynając w wierzchołku startowym. W każdym kroku pionek przemieszcza się na losowo wybranego sąsiada aktualnego wierzchołka. Czy dla dowolnego drzewa pionek dojdzie, z prawdopodobieństwem 1, do wierzchołka końcowego?

Zadanie 3 (Spacer losowy z jedną barierą)**.** Startujemy doświadczenie z liczbą 0. Dopóki aktualna liczba jest mniejsza od n dodajemy do niej 1 lub -1 z równym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dotrzemy do n?

Zadanie 4 (Bratobójczy pojedynek)**.** Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze walczą w systemie turniejowym (jakże by inaczej?). Uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Drabinka turnieju jest układana losowo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkają się w pojedynku?

Zadanie 5. Dana jest moneta asymetryczna, która z nieznanym Ci prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$ zwraca orła i z prawdopodobieństwem $1-p$ zwraca reszkę. Zaproponuj algorytm który będzie symulował zachowanie monety symetrycznej, tj. z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zwróci orła bądź reszkę. Jedyne co możesz robić to rzucać monetą asymetryczną i na bazie obserwowanych rezultatów kontynuować rzucanie, bądź przerwać i zwrócić wynik. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów monetą asymetryczną przed zwróceniem wyniku? Wynik podaj jako funkcję p.

Liniowość wartości oczekiwanej

Ćwiczenie 1. Na odcinku $[0,1]$ rozmieszczone jest w sposób losowy n mrówek i każda z nich z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zwrócona jest w lewo bądź w prawo. Mrówki z jednakową szybkością poruszają się w kierunku, w który są zwrócone, aż do momentu napotkania krawędzi tj, 0 lub 1 - wtedy spadają, bądź zderzenia z inną mrówką - wtedy obie odbijają się od siebie i każda z nich zmienia swój zwrot. Wyznacz oczekiwaną liczbę kolizji do jakich dojdzie zanim wszystkie mrówki pospadają z odcinka.

Ćwiczenie 2. Każdy z n graczy rzuca niezależnie od pozostałych kostką.

(i) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje 1 punkt. Znaleźć wartość oczekiwaną.

(ii) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje tyle punktów ile wyrzucili. Znaleźć wartość oczekiwaną.

Ćwiczenie 3. Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Punkt stały permutacji π to taki x, że $\pi(x) = x$. Wyznacz oczekiwaną liczbę punktów stałych permutacji π.

Ćwiczenie 4. Inwersja w permutacji π to para indeksów $i < j$ taka że $\pi(i) > \pi(j)$. Wyznacz oczekiwaną liczbę inwersji losowej permutacji π zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

Ćwiczenie 5. n osób ($n \geqslant 3$) usiadło formując okrąg. Każda osoba w sposób losowy wybrała sąsiada. Jaka jest oczekiwana liczba osób niewybranych przez nikogo?

A jaka jest odpowiedź jeśli te osoby siedzą w linii (czyli skrajne osoby mają tylko jednego sąsiada)?