Miara i całka

Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to Ω jest dowolnym zbiorem, w szczególności może mieć dowolnie wiele elementów (np. nieprzeliczelnie wiele)! Domyślnie Σ jest σ-algebrą na Ω.

Zbiór *co najwyżej przeliczalny* to taki, który jest albo skończony, albo ma tyle samo elementów co zbiór liczb naturalnych.

Niech $x \in \mathbb{R}^d$ i $r \geqslant 0$, wtedy *kula otwarta o środku w x i promieniu r* to zbiór $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| < r\}$ (dla $z \in \mathbb{R}^d$ rozważamy $|z| = \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_d^2}$).

Mówimy, że podbiór $U \subseteq \mathbb{R}^d$ jest *otwarty* jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(x,r) \subseteq U$.

Dla $E \subseteq \Omega$, *funkcja charakterystyczna χ_E zbioru E* to funkcja zdefiniowana na Ω taka, że $\chi_E(x) = 1$ gdy $x \in E$ i $\chi_E(x) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Dopełnienie zbioru E oznaczamy przez E^c.

Zadanie 1. Niech A_o będzie rodziną wszystkich otwartych podzbiorów $\mathbb{R}$. Niech A_∞ będzie rodziną wszystkich przedziałów w $\mathbb{R}$, które są postaci $(-\infty, x]$. Niech A_q będzie rodziną wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$, które są skończonymi sumami otwartodomkniętych przedziałów $(a,b]$. Które spośród A_o, A_∞, A_q są algebrami? Które σ-algebrami?

Zadanie 2. Definiujemy następujące rodziny podzbiorów Ω.

1. Niech $B \subseteq \Omega$ i niech $\Sigma_B = \{A \subseteq \Omega : B \subseteq A \text{ lub } B \cap A = \emptyset\}$.
2. Niech $\Sigma_{\aleph_0}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów Ω, które albo są co najwyżej przeliczalne, albo ich dopełnienia są conajwyżej przeliczalne.
3. Niech $f : \Omega \to \Omega'$ będzie dowolną funkcją i niech Σ' będzie σ-algebrą na Ω'. Niech $\Sigma_f = \{f^{-1}(B) : B \in \Sigma'\}$.

Udowodnij, że $\Sigma_B, \Sigma_{\aleph_0}, \Sigma_f$ są σ-algebrami.

Zadanie 3. Czy istnieje nieskończona przeliczalna σ-algebra?

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in I\}$ jest rodziną σ-algebr na jakimś ustalonym zbiorze Ω (dla dowolnego zbioru indeksów I), to $\bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha$ też jest σ-algebrą.

Jeśli $\mathcal{F}$ jest dowolną rodziną podzbiorów Ω, to $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap\{\Sigma \subseteq 2^\Omega : \mathcal{F} \subseteq \Sigma \text{ i } \Sigma \text{ jest } \sigma\text{-algebrą}\}$. Rodzina pod przecięciem jest zawsze niepusta (dlaczego?). Stąd i z zadania powyżej wynika, że $\sigma(\mathcal{F})$ jest zawsze σ-algebrą, nazywamy ją: *σ-algebrą generowaną przez $\mathcal{F}$*.

Zadanie 5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^d$. Pokaż, że jeśli $\mathcal{F} = \{B(0,q) : q \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)\}$, to $\sigma(\mathcal{F})$ nie jest generowana przez żaden przeliczalny podział $\mathbb{R}^d$.

Zadanie 6. Niech A_q, A_o, A_∞ będą jak w Zadaniu 1. Udowodnij, że $\sigma(A_q) = \sigma(A_o) = \sigma(A_\infty)$. Taka σ-algebra jest nazywana *rodziną zbiorów borelowskich* i często jest oznaczana przez $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zastanów się, czy twoje rozumowanie uogólnia się na $\mathbb{R}^d$.

W dalszych zadaniach można używać powyższego zadania w ogólnej wersji dla $\mathbb{R}^d$. Gdy nie specyfikujemy σ-algebry dla przestrzeni $\mathbb{R}^d$ to domyślnie rozważamy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Ważny fakt na temat zbiorów borelowskich (którego dowód jest dość skomplikowany) to to, że jest ich tyle samo co liczb rzeczywistych.

Zadanie 7. Niech $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \{0, 1\}$ będzie zdefiniowana następująco. Dla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy $\mu(B) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $(0, \varepsilon) \subseteq B$. Czy funkcja μ jest skończenie addytywna? Jeśli tak, to czy jest przeliczalnie addytywna? A jak wygląda sytuacja, gdy zawężymy dziedzinę do elementów z A_q z Zadania 1?

Zadanie 8. Czy każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna? Czy złożenie dwóch funkcji mierzalnych jest mierzalne? W przypadku funkcji o wartościach rzeczywistych, czy suma/iloczyn/maximum ze skończonej liczby funkcji mierzalnych jest mierzalne?

Zadanie 9. Niech $f_i : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{R}$ dla każdego dodatniego i. Niech $f^*(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ i $f_* = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ dla każdego $x \in \Omega$. Czy funkcje f^* i f_* są mierzalne?

Do kilku następnych zadań, niech μ będzie miarą na (Ω, Σ), niech $f, g \in L_1(\mu)$, niech $h : (\Omega, \Sigma) \to [0, \infty]$ będzie mierzalna i niech $E \in \Sigma$. Pamiętaj, że $L_1(\mu)$ oznacza funkcje zespolone zgodnie z definicją z wykładu!

Zadanie 10. Niech $h : (\Omega, \Sigma) \to [0, \infty]$ będzie funkcją mierzalną. Udowodnij, że istnieje ciąg $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ mierzalnych funkcji prostych/schodkowych ($s_n : (\Omega, \Sigma) \to [0, \infty)$) takich, że $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant h$, oraz dla każdego $x \in \Omega$, mamy $h(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$.

Zadanie 11. Udowodnij, że

1. $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \chi_E f \, \mathrm{d}\mu$,
2. $\int_E f + g \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.

Zadanie 12. Udowodnij, że:

1. jeśli $\int_E h \, \mathrm{d}\mu = 0$, to $h|_E = 0$ μ-prawie wszędzie;
2. jeśli dla każdego $F \in \Sigma$, mamy $\int_F f \, \mathrm{d}\mu = 0$, to $f = 0$ μ-prawie wszędzie;
3. $\left|\int_F f \, \mathrm{d}\mu\right| = \int_F |f| \, \mathrm{d}\mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba zespolona α taka, że $|\alpha| = 1$ i $\alpha f = |f|$ μ-prawie wszędzie.

Niech $\mathbb{P}$ będzie miarą probabilistyczną na zbiorach borelowskich przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Zwykle wtedy mówimy, że $\mathbb{P}$ jest *rozkładem*.

$\mathbb{P}$ jest *dyskretny* jeśli istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $K \subseteq \mathbb{R}^d$ taki, że $\mathbb{P}(K) = 1$ i dla każdego $x \in K$ mamy $\mathbb{P}(x) > 0$.

$\mathbb{P}$ jest *ciągły* jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ mamy $\mathbb{P}(x) = 0$.

$\mathbb{P}$ jest *absolutnie ciągły* jeśli dla każdego $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ takiego, że $\lambda(E) = 0$ (λ to d-wymiarowa miara Lebesgue'a) mamy $\mathbb{P}(E) = 0$.

Zauważ, że każdy rozkład absolutnie ciągły jest ciągły, ale...

Zadanie 13. Dla każdego dodatniego d, podaj przykład rozkładu, który jest ciągły, ale nie jest absolutnie ciągły.

Zadanie 14. Podaj przykład zbioru Ω z σ-algebrą Σ, rodziny $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω, oraz dwóch miar probabilistycznych μ, ν takich, że: (1) $\mu(F) = \nu(F)$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$; (2) $\sigma(\mathcal{F}) = \Sigma$; (3) $\mu \neq \nu$.

Ciekawostka: Takiego przykładu jak w powyższym zadaniu nie da się utworzyć, jeśli założymy dodatkowo, że $\mathcal{F}$ jest algebrą.

W następych dwóch zadaniach korzystaj jedynie z własności miary Lebesgue'a i zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a podanych na wykładzie.

Zadanie 15. Pokaż konstrukcję zbioru, który nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Zadanie 16. Pokaż, że istnieje co najmniej tyle zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a co elementów w $2^{\mathbb{R}}$. Zauważ, że pokazuje to istnienie zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, które nie są borelowskie. *Hint:* Spróbuj znaleźć duży zbiór z miarą Lebesgue'a równą 0.

Zadanie 17. Rozważmy esperyment rzucania piłką zaprezentowany na wykładzie. Dla przypomnienia: stoimy w punkcie 1 osi liczbowej i rzucamy piłkę w kierunku punktu 0. Z równym prawdopodobieństwem trafiamy w punkt w przedziale $[0, 1]$. Jednak złośliwy skrzat z długimi rękami stoi w punkcie 0 i jeśli piłka spadnie w przedziale $[0, \frac{1}{3}]$ to zabiera ją i kładzie w punkcie 0. Przypomnij sobie jak formalnie wygląda miara, którą rozważamy w takim eksperymencie. Następnie, korzystając z ogólniej definicji wartości oczekiwanej oblicz oczekiwaną wartość punktu w którym wyląduje piłka. Zachować wysoki poziom formalizmu, w szczególności pamiętaj o abstrakcyjnej definicji całki Lebesgue'a.

Zadanie 18. Rozważmy esperyment z Zadania 8 z Zestawu 1. Oblicz oczekiwaną liczbę wystąpień ustalonego ciągu q.

Zadanie bonusowe do spisania

Zadanie składa się z kilku mniejszych kroków. Celem jest pokazanie istnienia miary Lebesque.

Mówimy, że funkcja $\mu^* : 2^\Omega \to [0, \infty]$ jest *miarą zewnętrzną* jeśli

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(ii) jeśli $E \subseteq F$ to $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$,
(iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Ustalmy miarę zewnętrzną μ^* na Ω. Mówimy, że zbiór $E \subseteq \Omega$ jest *μ^*-mierzalny* jeśli dla każdego $F \subseteq \Omega$, mamy

$$\mu^*(F) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E^c \cap F).$$

Niech Σ_{μ^*} będzie zbiorem wszystkich μ^*-mierzalnych podzbiorów Ω.

Krok 1. Σ_{μ^*} jest σ-algebrą.

Krok 2. Funkcja $\mu : \Sigma_{\mu^*} \to [0, \infty]$ jest miarą.

Niech λ_0 będzie zdefiniowana na A_q jako zwyczajna długość. To znaczy, $\lambda_0((a, b]) = b - a$ z naturalnym rozszerzeniem na zbiory składające się z większej liczby przedziałów. Dla $E \subseteq \mathbb{R}$, definiujemy

$$\lambda^*(E) = \inf_{F \in A_q, E \subseteq F} \lambda_0(F).$$

Krok 3. Funkcja λ^* jest miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}$.

Dodatkowo zauważamy, że dla dowolnego $E \in A_q$, mamy $\lambda^*(I) = \lambda(I)$. W efekcie otrzymujemy miarę Lebesgue'a λ. Zbiory w Σ_{λ^*} zwykle nazywamy *zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a*. Pozostaje pokazać kilka własności λ.

Krok 4. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$, przedział $(-\infty, x]$ jest λ^*-mierzalny. Dodatkowo, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma_{\lambda^*}$.

Krok 5. Zauważ, że to oznacza istnienie unikalnej miary λ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zgodniej z λ_0 (miary Lebesgue'a).

Krok 6. Pokaż,że λ jest nieczuła na translacje, to znaczy dla każdego zbioru $E \in \Sigma_{\lambda^*}$ i $x \in \mathbb{R}$, mamy $\lambda(E) = \lambda(E + x)$, gdzie $E + x = \{y + x : y \in E\}$.

Krok 7. Pokaż,że jeśli dla pewnego $E \in \Sigma_{\lambda^*}$ mamy $\lambda(E) = 0$ i $F \subseteq E$, to $F \in \Sigma_{\lambda^*}$

Krok 8. Krótko skomentuj co dzieje się w poszczególnych krokach jeśli rozważymy przestrzeń $\mathbb{R}^d$.

Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu w terminie przed następnymi zajęciami. Aby rozwiązanie było rozpatrywane, należy rozwiązać pierwsze trzy kroki. W przypadku pominięcia jednego lub dwóch kroków końcowych przewidujemy punkty cząstkowe, jednak będziemy zdecydowanie premiować pełne rozwiązania. Proszę pamiętać, aby rozwiązania były formalne i porządne bez machania rękami!