Liniowość wartości oczekiwanej, wariancja

Zadanie 1. Niech T będzie dowolnym drzewem z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami: startowym i końcowym. Pionek w sposób losowy porusza się po drzewie rozpoczynając w wierzchołku startowym. W każdym kroku pionek przemieszcza się na losowo wybranego sąsiada aktualnego wierzchołka. Czy dla dowolnego drzewa pionek dojdzie, z prawdopodobieństwem 1, do wierzchołka końcowego?

Zadanie 2 (Spacer losowy z jedną barierą)**.** Startujemy doświadczenie z liczbą 0. Dopóki aktualna liczba jest mniejsza od n dodajemy do niej 1 lub -1 z równym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dotrzemy do n?

Zadanie 3. Dana jest moneta symetryczna. Zaproponuj algorytm, który będzie symulował zachowanie monety asymetrycznej o ustalonym wymiernym $p \in (0, 1)$. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów (symetryczną monetą) przed zwróceniem wyniku (symulowanej asymetrycznej monety)? Im mniejsza oczekiwana liczba rzutów tym lepiej.

Zadanie 4. Cyklem długości k w permutacji π nazywamy ciąg indeksów $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} = a_1$ taki że $\pi(a_i) = a_{i+1}$. Każdą permutację π można jednoznacznie rozłożyć na rozłączne cykle. Wyznacz oczekiwaną liczbę cykli w losowej permutacji π.

Zadanie 5. Sala kinowa ma 100 miejsc: cztery rzędy po 5 miejsc, cztery rzędy po 10 miejsc i dwa rzędy po 20 miejsc. Do kina przychodzi 50 zakochanych par. Wszystkie osoby zasiadły na losowych miejscach. Jaka jest oczekiwana liczba par siedzących koło siebie? Zakładając, że każda para to chłopiec i dziewczyna, jaka jest oczekiwana liczba dziewczyn siedzących pomiędzy dwoma chłopcami?

Zadanie 6. Niech T_n będzie pełnym drzewem binarnym o głębokości n (czyli T_n ma $2^n - 1$ wierzchołków). Każda krawędź T zostaje usunięta z prawdopodobieństwem $1/2$ i niezależnie od akcji na innych krawędziach. Jaka jest oczekiwana liczba wierzchołków w spójnej składowej z korzeniem w wynikowym lesie?

Zadanie 7. W talii $2n$ kart mamy n czerwonych i n czarnych kart. Talia jest potasowana i kolejno wszystkie karty są wykładane na stół. Dla każdej wyciągniętej czerwonej karty, jeśli po jej wyciągnięciu na stole jest więcej czerwonych niż czarnych kart to zdobywamy jeden punkt. Jaka jest oczekiwana liczba zdobytych punktów?

Zadanie 8. W samolocie leci $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1$ rodzin, gdzie n_i rodzin ma i sztuk bagażu, dla $1 \leqslant i \leqslant 4$, a nasza rodzina jest jedyną z pięcioma bagażami. Przyjmując, że kolejność wydawania walizek jest losowa, jaka jest oczekiwana liczba rodzin, które będą czekać dłużej od naszej na swoje bagaże?

Zadanie 9. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Jakie warunki muszą spełniać a i b, żeby istniała zmienna losowa, która ma wartość oczekiwaną równą a i wariancję równą b? W przypadku, gdy taka zmienna losowa istnieje, podaj ją.

Zadanie 10. Podaj przykład zmiennej losowej, która ma skończoną wartość oczekiwaną, ale nieograniczoną wariancję.

Zadanie 11. Niech X będzie liczbą naturalną wylosowaną w sposób jednostajny z przedziału $[1, n]$, zaś Y liczbą całkowitą wylosowaną w sposób jednostajny z przedziału $[-k, k]$. Znajdź $\operatorname{Var} X$ oraz $\operatorname{Var} Y$.

Zadanie 12. Udowodnij, że:

(i) Jeśli $\operatorname{Var} X = 0$ to istnieje a takie że $\operatorname{P}(X = a) = 1$
(ii) $\forall_{a,b\in\mathbb{R}} : \operatorname{Var} bX + a = b^2 \operatorname{Var} X$

Zadanie 13. Czy jeśli dla dwóch zmiennych losowych X, Y mamy $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ to X, Y są niezalezne?

W następnych zadaniach pomocna może okazać się następująca trywialna obserwacja. Jeśli wartość oczekiwana pewnej zmiennej losowej X wynosi x to $\mathbb{P}(X \geqslant x) > 0$ (podobnie $\mathbb{P}(X \leqslant x) > 0$).

Zadanie 14. Udowodnij, że każdy graf zawiera podgraf dwudzielny, który ma co najmniej połowę krawędzi oryginalnego grafu. *Hint:* Pamiętaj, że graf dwudzielny to innymi słowy graf dwukolorowalny.

Zadanie 15. Udowodnij, że każdy graf dwudzielny z m krawędziami zawiera podgraf na co najmniej $\frac{3}{4}m^{\frac{2}{3}}$ krawędziach, który nie zawiera cyklu na czterech wierzchołkach C_4 jako podgrafu. *Hint:* Grafy można losować. Jednym ze sposobów jest ustalenie pewnego parametru p i dla każdej pary wierzchołków niezależne wylosowanie tego czy łączy je krawędź, czy nie z prawdopodbieństwen p. Jeśli losowany graf nie działa, to może należy go zmodyfikować po wylosowaniu?

Zadanie 16. Rozważmy n miast i liczbę $z > 1$. Z każdego z n miast mamy bezpośrednie połączenie lotnicze do co najmniej z innych miast. Udowodnij, że istnieje grupa co najwyżej $n\frac{1+\ln(z+1)}{z+1}$ supermiast, takich, że dla każdego innego miasta M istnieje sąsiednie supermiasto, z którego mamy bezpośrednie połączenie lotnicze do M. *Hint:* Pamiętaj, że dla odpowiednich parametrów a, x prawdą jest, że $(1 + \frac{a}{x})^x \leqslant e^a$.

Zadanie bonusowe do spisania

Niech F będzie grafem. Dla każdej dodatniej liczby n definiujemy $\mathrm{ex}(n, F)$ jako najmniejszą liczbę dodatnią m taką, że istnieje graf G, który ma m krawędzi i nie zawiera F jako podgrafu (niekoniecznie indukowanego). Na przykład, wiadomo, że $\mathrm{ex}(n, \Delta) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ dla każdego dodatniego n, gdzie Δ oznacza trójkąt. Dolne ograniczenie jest świadczone przez zbalandowany graf dwudzielny pełny, natomiast górne ograniczenie wynika np. z prostej indukcji po n (istnieje wiele różnych dowodów tego faktu).

Dla dodatnich liczb całkowitych s, t, niech $K_{s,t}$ oznacza graf dwudzielny pełny zawierający dwa zbiory niezależne z odpowiednio s i t elementami. Zadanie będzie się skupiać na oszacowaniach $\mathrm{ex}(n, K_{s,t})$. Proszę się nie przejmować skomplikowanymi wyrażeniami w treściach problemów. Oczywiście można je zapisać w uproszczonej formie, jednak dokładne wartości mają służyć za podpowiedź w rozwiązywaniu zadań. Najpierw ograniczymy z góry $\mathrm{ex}(n, K_{s,t})$.

Problem 1. Udowodnij, że dla każdego dodatniego s, t mamy

$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \leqslant \frac{1}{2}(t-1)^{\frac{1}{s}} n^{2-\frac{1}{s}} + \frac{1}{2}(s-1)n.$$

Hint: Podwójne zliczanie.

Następnie zaaplikujemy powyższe do naturalnego problemu, który jest pozornie bez związku. Dla podzbioru liczb całkowitych dodatnich A definiujemy $A + A = \{a + a' : a, a' \in A\}$.

Problem 2. Udowodnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$, odpowiednio dużego całkowitego k i podzbioru liczb całkowitych dodatnich A takiego, że $\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, k^2\} \subseteq A + A$ mamy

$$|A| \geqslant k^{2/3-\varepsilon}.$$

Uwaga: W rozwiązaniu można użyć faktu z teori liczb, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, liczba dzielników n jest $o(n^\delta)$ dla każdego $\delta > 0$.

Na koniec chcemy ograniczyć $\mathrm{ex}(n, K_{s,t})$ z dołu. Przedstawimy dwa ograniczenia, w pierwszym należy użyć argumentu przez zliczanie, a w drugim przez losowanie.

Problem 3. Udowodnij, że dla każdego $s, t > 1$ mamy

$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \geqslant \frac{1}{4}(s!t!)^{\frac{1}{st}} n^{2-\frac{1}{s}-\frac{1}{t}}.$$

Problem 4. Udowodnij, że dla każdego $s, t > 1$ mamy

$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \geqslant \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{s!t!}2^{st}\right) n^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}.$$

Można zauważyć, że dolne ograniczenia nie są ścisłe z górnym. Co ciekawe, nie znamy ścisłych ograniczeń. Najmniejszy otwary przypadek to $\mathrm{ex}(n, K_{4,4})$. Wiadomo, że ta wartość jest $O(n^{\frac{7}{4}})$, ale nie jest wiadomo, czy to ograniczenie jest ścisłe. Jeśli powyższe problemy okazały się zbyt proste, możesz spróbować skonstruować rodzinę grafów G_n bez $K_{4,4}$, gdzie każdy graf G_n ma n wierzchołków i $cn^{\frac{7}{4}}$ krawędzi dla pewnej uniwersalnej stałej c.

Każdy z czterech problemów jest warty $\frac{1}{4}$ możliwych punktów za to zadanie. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu w terminie do piątku 27.10.2023 o godzinie 23:59.