

Liniowość wartości oczekiwanej

Zadanie 1. Cyklem długości k w permutacji π nazywamy ciąg indeksów $a_1, \dots, a_k, a_{k+1} = a_1$ taki że $\pi(a_i) = a_{i+1}$. Każdą permutację π można jednoznacznie rozłożyć na rozłączne cykle. Wyznacz oczekiwaną liczbę cykli w losowej permutacji π .

Zadanie 2. Sala kinowa ma 100 miejsc: cztery rzędy po 5 miejsc, cztery rzędy po 10 miejsc i dwa rzędy po 20 miejsc. Do kina przychodzi 50 zakochanych par. Wszystkie osoby zasiadły na losowych miejscach. Jaka jest oczekiwana liczba par siedzących koło siebie? Zakładając, że każda para to chłopiec i dziewczyna, jaka jest oczekiwana liczba dziewczyn siedzących pomiędzy dwoma chłopcami?

Zadanie 3. Niech T_n będzie pełnym drzewem binarnym o głębokości n (czyli T_n ma $2^n - 1$ wierzchołków). Każda krawędź T zostaje usunięta z prawdopodobieństwem $1/2$ i niezależnie od akcji na innych krawędziach. Jaka jest oczekiwana liczba wierzchołków w spójnej składowej z korzeniem w wynikowym lesie?

Zadanie 4. W talii $2n$ kart mamy n czerwonych i n czarnych kart. Talia jest potasowana i kolejno wszystkie karty są wykładane na stół. Dla każdej wyciągniętej czerwonej karty, jeśli po jej wyciągnięciu na stole jest więcej czerwonych niż czarnych kart to zdobywamy jeden punkt. Jaka jest oczekiwana liczba zdobytych punktów?

Zadanie 5. W samolocie leci $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1$ rodzin, gdzie n_i rodzin ma i sztuk bagażu, dla $1 \leq i \leq 4$, a nasza rodzina jest jedyną z pięcioma bagażami. Przyjmując, że kolejność wydawania walizek jest losowa, jaka jest oczekiwana liczba rodzin, które będą czekać dłużej od naszej na swoje bagaże?

Zadanie 6. Dla zmiennej losowej X z rozkładem geometrycznym z parametrem p wyznacz $\mathbf{E}[X^3]$ oraz $\mathbf{E}[X^4]$.

Wartość oczekiwana i wariancja

Ćwiczenie 1. Podaj przykład zmiennej losowej, która ma skończoną wartość oczekiwaną, ale nieograniczoną wariancję.

Ćwiczenie 2. Niech X będzie liczbą naturalną wylosowaną w sposób jednostajny z przedziału $[1, n]$, zaś Y liczbą całkowitą wylosowaną w sposób jednostajny z przedziału $[-k, k]$. Znajdź $\mathbf{Var}(X)$ oraz $\mathbf{Var}(Y)$.

Ćwiczenie 3. Udowodnij, że:

- (i) Jeśli $\mathbf{Var}(X) = 0$ to istnieje a takie że $\mathbf{P}(X = a) = 1$
- (ii) $\forall a, b \in \mathbb{R} : \mathbf{Var}(bX + a) = b^2 \mathbf{Var}(X)$

Ćwiczenie 4. Każdy z n graczy rzuca niezależnie od pozostałych kostką.

-
- (i) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje 1 punkt. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję liczby uzyskanych punktów.
 - (ii) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje tyle punktów ile wyrzucili. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję liczby uzyskanych punktów.

Ćwiczenie 5. Algorytm bąbelkowy sortowania przegląda podaną na wejściu permutację i odwraca sąsiadujące elementy będące w inwersji. Przejścia wzdłuż permutacji są powtarzane tak długo, aż permutacja jest posortowana. Załóż, że podajemy temu algorytmowi losowo wybraną permutację zbioru $\{1, \dots, n\}$. Jaka jest oczekiwana liczba inwersji, którą odwróci algorytm podczas swojego działania.