Miara i całka

Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to Ω jest dowolnym zbiorem, w szczególności może mieć dowolnie wiele elementów (np. nieprzeliczalnie wiele)!

Niech Σ będzie rodziną podzbiorów Ω. Σ może spełniać następujące warunki.

1. $\emptyset, \Omega \in \Sigma$.
2. Jeśli $E \in \Sigma$ to $\Omega / E \in \Sigma$.
3. Jeśli $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$, to $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \Sigma$.
4. Jeśli $E_1, E_2, \ldots \in \Sigma$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$.

Jeśli Σ spełnia 1,2,3, to mówimy, że Σ jest *algebrą*. Jeśli Σ spełnia 1,2,3,4, to mówimy, że Σ jest *σ-algebrą*. Domyślnie Σ jest σ-algebrą na Ω.

Zbiór *co najwyżej przeliczalny* to taki, który jest albo skończony, albo ma tyle samo elementów co zbiór liczb naturalnych. Niech $x \in \mathbb{R}^d$ i $r \geqslant 0$, wtedy *kula otwarta o środku w x i promieniu r*, to zbiór $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| < r\}$ (dla $z \in \mathbb{R}^d$ rozważamy $|z| = \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_d^2}$). Mówimy, że podzbiór $U \subseteq \mathbb{R}^d$ jest *otwarty* jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(x, r) \subseteq U$. Dla $E \subseteq \Omega$, *funkcja charakterystyczna χ_E zbioru E* to funkcja zdefiniowana na Ω taka, że $\chi_E(x) = 1$, gdy $x \in E$ i $\chi_E(x) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Zadanie 1. Udowodnij, że liczba elementów skończonej algebry (czyli też σ-algebry) jest potęgą dwójki.

Zadanie 2. Czy istnieje nieskończona przeliczalna σ-algebra?

Zadanie 3. Niech $B \subseteq \Omega$ i niech $\Sigma_B = \{A \subseteq \Omega : B \subseteq A \text{ lub } B \cap A = \emptyset\}$. Udowodnij, że Σ_B jest σ-algebrą.

Zadanie 4. Niech $\Sigma_{\aleph_0}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów Ω, które albo są co najwyżej przeliczalne, albo ich dopełnienia są co najwyżej przeliczalne. Udowodnij, że $\Sigma_{\aleph_0}$ jest σ-algebrą.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in I\}$ jest rodziną σ-algebr na jakimś ustalonym zbiorze Ω (dla dowolnego zbioru indeksów I), to $\bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha$ też jest σ-algebrą.

Jeśli $\mathcal{F}$ jest dowolną rodziną podzbiorów Ω, to $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap\{\Sigma \subseteq 2^\Omega : \mathcal{F} \subseteq \Sigma \text{ i } \Sigma \text{ jest } \sigma\text{-algebrą}\}$. Rodzina pod przecięciem jest zawsze niepusta (dlaczego?). Stąd i z zadania powyżej wynika, że $\sigma(\mathcal{F})$ jest zawsze σ-algebrą, nazywamy ją: *σ-algebrą generowaną przez $\mathcal{F}$*. Niech $\mathcal{A}_o$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów otwartych $\mathbb{R}$. Zbiory borelowskie $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ są definiowane jako $\sigma(\mathcal{A}_o)$.

Zadanie 6. Udowodnij, że każdy zbiór otwarty w $\mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalną sumą przedziałów otwartych. Wywnioskuj, że $\mathcal{A}_o$ jest algebrą.

Zadanie 7. Udowodnij, że $\mathcal{A}_o$ nie jest σ-algebrą.

Zadanie 8. Niech $\mathcal{A}_\infty = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ i niech $U \in \mathcal{A}_o$. Udowodnij, że każda σ-algebra zaweierająca $\mathcal{A}_\infty$ zawiera U. Innymi słowy pokazujemy, że $\mathcal{A}_o \subseteq \sigma(\mathcal{A}_\infty)$, a co za tym idzie $\sigma(\mathcal{A}_o) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_\infty)$. Podobnie, pokaż, że $\sigma(\mathcal{A}_o) \supseteq \sigma(\mathcal{A}_\infty)$.

Funkcja $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ jest *miarą*, jeśli $\mu(\emptyset) = 0$ i dla każdej rodziny $E_1, E_2, \ldots \in \Sigma$ zbiorów parami rozłącznych

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Drugą własność nazywamy *przeliczalną addytywnością*. Jeśli spełniona byłaby analogiczna własność, ale tylko dla skończonych rodzin, to mówimy o *skończonej addytywności*.

Zadanie 9. Niech $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \{0, 1\}$ będzie zdefiniowana następująco. Dla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy $\nu(B) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $(0, \varepsilon) \subseteq B$. Czy funkcja ν jest skończenie addytywna? Jeśli tak, to czy jest przeliczalnie addytywna?

Zadanie 10. Rozważ funkcję $\nu' = \nu|_{\mathcal{A}_o}$, gdzie ν jest funkcją z poprzedniego zadania. Czy funkcja ν' jest skończenie addytywna? Jeśli tak, to czy jest przeliczalnie addytywna?

Mając daną funkcję $f : (\Omega, \Sigma) \to (\Omega', \Sigma')$, mówimy, że f jest *mierzalna*, jeśli dla każdego $E \in \Sigma'$, mamy $f^{-1}(E) \in \Sigma$.

Zadanie 11. Czy złożenie dwóch funkcji mierzalnych jest mierzalne?

Zadanie 12. Czy każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna?
Wskazówka: Skoro $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}_o) = \sigma(\mathcal{A}_\infty)$, to wystarczy pokazać, że $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

Do kilku następnych zadań, niech μ będzie miarą na (Ω, Σ) i niech $E \in \Sigma$.

Zadanie 13. Udowodnij, że jeśli $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jest mierzalna, to

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \chi_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Wskazówka: Najpierw udowodnij równość dla f będącej funkcją schodkową. Następnie skorzystaj z definicji całki, aby otrzymać równość dla f nieujemnej. Przejście z f nieujemnej do rzeczywistej i zespolonej jest bardzo proste (korzystamy z definicji).

Zadanie 14. Udowodnij, że jeśli $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ są mierzalne, to

$$\int_E f + g \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Wskazówka: Najpierw udowodnij równość dla f i g będących funkcjami schodkowymi. Następnie skorzystaj z twierdzenia z wykładu o aproksymacji całki całkami funkcji schodkowych. Znowu przejście z funkcji nieujemnych do rzeczywistych i zespolnych jest bardzo proste.

Zadanie poza konkursem na spostrzegawczość. Powyższe dwa zadania pomijają pewien istotny techniczny szczegół. Jaki?

Zadanie 15. Niech h będzie mierzalną funkcją nieujemną na Ω. Udowodnij, że jeśli $\int_E h \, \mathrm{d}\mu = 0$, to $\mu(\{x \in E \mid h(x) = 0\}) = 0$ (mówimy wtedy, że $h|_E = 0$ *μ-prawie wszędzie*).

Zadanie bonusowe do spisania (1,5pkt)

Zadanie składa się z kilku mniejszych kroków. Celem jest pokazanie istnienia miary Lebesgue'a. Miara Lebesgue'a to rozszerzenie zwykłej "długości" na więcej zbiorów. Dodatkowo chcemy, żeby miara Lebesgue'a spełniała pewne naturalne własności. Dlatego tak naprawdę dowodzimy następującego twierdzenia.

Twierdzenie. Istnieje σ-algebra Σ_λ na $\mathbb{R}$ i miara λ na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}, \Sigma_\lambda)$ taka, że

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma_\lambda$;
2. $\lambda((a,b)) = b - a$ dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$ takiego, że $a < b$;
3. $\lambda(E) = \lambda(E + x)$ dla każdego $E \in \Sigma_\lambda$ i $x \in \mathbb{R}$, gdzie $E + x = \{y + x : y \in E\}$;
4. jeśli $E \in \Sigma_\lambda$ taki, że $\lambda(E) = 0$ i $F \subseteq E$ to $F \in \Sigma_\lambda$.

Dodatkowo, λ jest jedyną taką miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Trzy pierwsze własności są bardzo intuicyjne. Po pierwsze chcemy mierzyć wszystkie "porządne" zbiory; po drugie chcemy, żeby nasza miara rozszerzała pojęcia długości i po trzecie chcemy, żeby była nieczuła na translacje. Teraz przejdziemy do dowodu twierdzenia.

Mówimy, że funkcja $\mu^* : 2^\Omega \to [0, \infty]$ jest *miarą zewnętrzną* jeśli

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(ii) jeśli $E \subseteq F$, to $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$,
(iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n)$.

Ustalmy miarę zewnętrzną μ^* na Ω. Mówimy, że zbiór $E \subseteq \Omega$ jest μ^*-*mierzalny*, jeśli dla każdego $F \subseteq \Omega$ mamy

$$\mu^*(F) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E^c \cap F).$$

Niech Σ_{μ^*} będzie zbiorem wszystkich μ^*-mierzalnych podzbiorów Ω.

Krok 1. Σ_{μ^*} jest σ-algebrą.

Krok 2. Funkcja $\mu : \Sigma_{\mu^*} \to [0, \infty]$ jest miarą.

Niech A_q będzie rodziną co najwyżej przeliczalnych sum przedziałów otwartych. Nietrudno pokazać, że $\sigma(A_q) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (można korzystać z tej własności). Niech λ_0 będzie zdefiniowana na A_q jako zwyczajna długość. To znaczy, $\lambda_0((a,b)) = b - a$ z naturalnym rozszerzeniem na zbiory składające się z większej liczby przedziałów. Dla $E \subseteq \mathbb{R}$, definiujemy

$$\lambda^*(E) = \inf_{F \in A_q, E \subseteq F} \lambda_0(F).$$

Krok 3. Funkcja λ^* jest miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}$.

Dodatkowo zauważamy, że dla dowolnego $E \in A_q$, mamy $\lambda^*(E) = \lambda(E)$. W efekcie otrzymujemy miarę Lebesgue'a λ. Zbiory w Σ_{λ^*} zwykle nazywamy *zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a*. Pozostaje pokazać kilka własności λ.

Krok 4. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$, przedział $(-\infty, x]$ jest λ^*-mierzalny. Dodatkowo, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma_{\lambda^*}$.

Krok 5. Zauważ, że to oznacza istnienie unikalnej miary λ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zgodniej z λ_0 (miary Lebesgue'a).

Krok 6. Pokaż, że λ jest nieczuła na translacje, to znaczy dla każdego zbioru $E \in \Sigma_{\lambda^*}$ i $x \in \mathbb{R}$, mamy $\lambda(E) = \lambda(E + x)$, gdzie $E + x = \{y + x : y \in E\}$.

Krok 7. Pokaż, że jeśli dla pewnego $E \in \Sigma_{\lambda^*}$ mamy $\lambda(E) = 0$ i $F \subseteq E$, to $F \in \Sigma_{\lambda^*}$.

Krok 8. Krótko skomentuj, co dzieje się w poszczególnych krokach, jeśli rozważymy przestrzeń $\mathbb{R}^d$.

Na koniec rozważmy miarę Lebesgue'a w pewnej konkretnej sytuacji. Powiedzmy, że losujemy punkt x z odcinka $[0, 1]$ jednostajnie, czyli dla $A \subseteq [0, 1]$ takiego, że $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy $\mathrm{P}(x \in A) = \lambda(A)$. Na wykładzie skomentowaliśmy, że $\mathrm{P}(x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$.

Problem 1. Udowodnij formalnie (ze wszystkimi szczegółami), że faktycznie

$$\mathrm{P}(x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0.$$

Zbiór $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ jest przeliczalny.

Problem 2. Czy istnieje nieprzeliczalny zbiór $A \subseteq [0, 1]$ taki, że $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $\mathrm{P}(x \in A) = 0$?

Konstrukcja miary Lebesgue'a jest warta 1 punkt. Aby rozwiązanie było rozpatrywane należy rozwiązać poprawnie co najmniej pierwsze trzy kroki. Problemy 1 i 2 są niezależne od pierwszej części i można korzystać z faktów w niej podanych nawet jeśli się jej nie rozwiązało. Problem 1 jest wart 0,1 punktu i Problem 2 jest wart 0,4 punktu.

Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu w terminie do czwartku 24.10.2023 o godzinie 23:59.