Wartość oczekiwana, wariancja i nierówność Czebyszewa

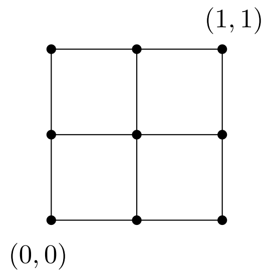
Zadanie 1. Ze standardowej talii 52 kart wyciągamy 13 (ręka brydżowa). Niech X to liczba wyciagniętych asów, a Y to liczba wyciągniętych caro.

(i) Czy X i Y są niezależne?
(ii) Czy X i Y są nieskorelowane?

(Zmienne X i Y są nieskorelowane jeśli $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]$.)

Zadanie 2. Rzucamy kostką, aż nie zanotujemy dwóch szóstek pod rząd. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów? Wskazówka: Odpowiedzią nie jest 36.

Zadanie 3. Wiewiórka chodzi po kracie w sposób losowy. Rozpoczyna swoją trasę w wierzchołku $(0,0)$ i w każdym kroku wybiera w sposób losowy, jednostajny i niezależny od innych wyborów jeden z sąsiednich wierzchołków aktualnego wierzchołka. W wierzchołku $(1,1)$ znajduje się żołądź. Jaka jest oczekiwana liczba kroków w której wiewiórka znajdzie żołędzia?



Zadanie 4. Pokazaliśmy, że oczekiwana liczba kroków algorytmu sortowania bąbelkowego to $\frac{1}{4}n\,(n-1)$. Jaka jest wariancja? Za pomocą nierówności Czebyszewa pokaż, że algorytm sortowania bąbelkowego wykonuje prawie zawsze liczbę kroków ograniczoną przez $\mathcal{O}\left(n^2\right)$.

Zadanie 5. Rzucamy monetą symetryczną n razy i otrzymujemy ciąg zer i jedynek długości n. Rozważmy wszystkie $\binom{n}{2}$ par indeksów. Dla każdej takiej pary zmienna X_{ij} jest wartością funkcji *xor* na i-tym oraz j-tym bicie. Niech $X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$.

(i) wykaż, że te zmienne nie są łącznie niezależne
(ii) wykaż, że te zmienne spełniają własność $\mathbf{E}[X_{ab}X_{cd}] = \mathbf{E}[X_{ab}]\,\mathbf{E}[X_{cd}]$
(iii) wyznacz $\mathbf{Var}(X)$ korzystając z poprzedniego podpunktu
(iv) przy pomocy nierówności Czebyszewa ogranicz $\mathbf{P}\left(|X - \mathbf{E}[X]| \geqslant n\right)$

Zadanie 6 (Słabe prawo wielkich liczb)**.** Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z tego samego rozkładu o skończonej wartości oczekiwanej μ oraz skończonym odchyleniu standardowym σ. Na bazie nierówności Czebyszewa pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Nierówności Chernoffa

Ćwiczenie 1. Wyznacz postać jawną funkcji tworzącej momenty dla rozkładów:

(i) jednostajnego na zbiorze $\{1, \dots, n\}$,
(ii) dwumianowego $\mathrm{Binom}(n, p)$.

Na jej podstawie wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję tych rozkładów. Dla rozkładu dwumianowego tworzącą wyznacz na dwa sposoby:

(i) oblicz $\mathbf{E}\left[e^{tX}\right]$ z definicji wartości oczekiwanej,
(ii) skorzystaj z niezależności zmiennych Bernouliego.

Ćwiczenie 2. Alicja i Bob rozgrywają pomiędzy sobą n pojedynków. Alicja jest lepsza i każdy pojedynek wygrywa niezależnie od pozostałych z prawdopodobieństwem 0.6. Zwycięzcą jest osoba która wygra więcej pojedynków. Za pomocą nierówności Chernoffa ogranicz prawdopodobieństwo tego, że zwycięzcą jest Bob.

Ćwiczenie 3. Dana jest moneta asymetryczna z nieznanym Ci $p \in (0, 1)$. Jak wiele rzutów musisz wykonać, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0.9 poznać wartość p z dokładnością do 0.1?