Łańcuchy Markowa

Zadanie 1. Rozważ dwustanowy proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$, który jest definiowany przez dwie macierze P oraz Q, obie rozmiaru 2×2. W parzystych krokach macierz P definiuje przejścia pomiędzy stanami, zaś w nieparzystych macierz Q. Uzasadnij dlaczego ten proces niekoniecznie jest czasowo homogeniczny. Podaj analogiczny proces, ale z większą liczbą stanów, który już jest czasowo homogeniczny a zatem jest łańcuchem Markowa, tzn. podaj proces $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ oraz funkcję f ze zbioru stanów procesu (Y_t) w zbiór stanów (X_t) takie, że (1) $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ jest łańcuchem Markowa, (2) $(f(Y_t))$ jest takim samym procesem co (X_t).

Zadanie 2. Poruszasz się między domem a biurem. Pewnego razu kupiłeś cztery parasole, które położyłeś w domu przy wejściu. Przyjmijmy następnie, że każdego dnia (zaczynając od Dnia 0) wychodzisz rano z domu do biura i po południu wychodzisz z biura do domu. Przed każdym takim wyjściem: jeśli w danym momencie pada deszcz i jeśli masz jeden z parasoli w swojej lokalizacji, to bierzesz parasol, chronisz się przed deszczem i odkładasz parasol w docelowej lokalizacji.

Załóżmy, że w każdym momencie prawdopodobieństwo tego, że pada wynosi p. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, niech X_{2n} będzie zmienną losową określającą liczbę parasoli w domu w Dniu n-tym rano przed Twoim wyjściem i niech X_{2n+1} będzie zmienną losową określającą liczbę parasoli w biurze w Dniu n-tym w czasie Twojej pracy.

1. Czy $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest łańcuchem Markowa?
2. Jeśli odpowiedział-aś/-eś na (i) tak, to czy ten łańcuch ma rozkład stacjonarny? Jeśli tak to oblicz ten rozkład.
3. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech A_n będzie zdarzeniem, że n-tego dnia zmokł-aś/-eś: to jest wychodząc z domu lub później wychodząc z pracy padał deszcz, a Ty nie miał-aś/-eś parasola. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.
4. Jeśli mieszkasz w Szkocji, gdzie $p = 0,6$, ile potrzebujesz kupić parasoli na starcie aby $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) < 0,1$?

Zadanie 3. Rozważ dwustanowy łańcuch Markowa dany macierzą:

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

Znajdź postać zwartą wyrażenia $P^t_{0,0}$.

Zadanie 4. W analizie randomizowanego algorytmu 2-SAT rozważaliśmy jednowymiarowy spacer losowy z całkowicie odbijającą barierą w 0. Rozważ analogiczny spacer, ale tym razem z częściowo odbijającą barierą w 0, tzn. z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ idziemy do stanu 1 oraz z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zostajemy w stanie 0. Przy tych założeniach, znajdź oczekiwaną liczbę kroków potrzebnych, aby dotrzeć do stanu n startując ze stanu i.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli jeden ze stanów w danej klasie relacji skomunikowania jest stanem rekurencyjnym, to wszystkie stany w tej klasie są rekurencyjnie. Udowodnij analogiczny rezultat dla stanów chwilowych.

Zadanie 6. Pokaż, że w skończonym łańcuchu Markowa:

(i) co najmniej jeden stan jest rekurencyjny
(ii) każdy stan rekurencyjny jest pozytywnie rekurencyjny

Zadanie 7. Dany jest n stanowy łańcuch Markowa opisywany macierzą P i z rozkładem stacjonarnym $\bar{\pi}$. Niech $X_0, \ldots, X_m$ będą początkowymi krokami łańcucha przy założeniu, że startujemy w X_0 z rozkładem stacjonarnym $\bar{\pi}$. Rozważ zmienne X_i w odwrotnej kolejności tj. $X_m, \ldots, X_0$.

(i) Pokaż, że zmienne w odwróconej kolejności tworzą łańcuch Markowa.
(ii) Pokaż, że odwrócony łańcuch dany jest macierzą przejścia $Q_{i,j} = \frac{\pi_j P_{j,i}}{\pi_i}$.
(iii) Pokaż, że jeśli oryginalny łańcuch jest *czasowo odwracalny* (czyli $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$), to $Q = P$.

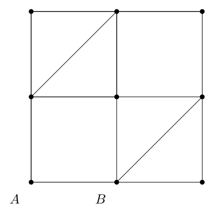
Zadanie 8. Niech X_n będzie zmienną losową równą sumie oczek w n niezależnych rzutach sprawiedliwą kostką. Pokaż, że dla każdego $k \geqslant 2$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(X_n \text{ jest podzielne przez } k\right) = \frac{1}{k}$$

Zadanie 9. Mysz i kot niezależnie od siebie przemieszczają się w sposób losowy po spójnym, nieskierowanym i niedwudzielnym grafie G. Niech $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$. Pokaż, że $O\left(m^2 n\right)$ jest ograniczeniem górnym na oczekiwaną liczbę kroków, po której dojdzie do spotkania. *Wskazówka*: rozważ łańcuch Markowa na parach indeksów (a, b).

Zadanie 10. Rozważ spacer losowy po grafie przedstawionym na rysunku. Spacer startuje z wierzchołka A. Rozważ stowarzyszony z nim łańcuch Markowa $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie stanami są wierzchołki grafu oraz $X_0 = A$.

(i) Wyznacz $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = A)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = B)$.
(ii) Jaka jest oczekiwana liczba odwiedzeń wierzchołka B przed pierwszym powrotem do A?



Zadanie 11. Graf L_n nazywany jest lizakiem i zdefiniowany jest następująco. Wierzchołki $\{1, \ldots, n/2\}$ tworzą klikę $K_{n/2}$, niech u będzie jednym z wierzchołków tej kliki. Pozostałe $n/2$ wierzchołków w połączeniu z u tworzą ścieżkę indukowaną na $n/2+1$ wierzchołkach. Niech v będzie najbardziej odległym od kliki wierzchołkiem należącym do ścieżki (jedyny wierzchołek w lizaku o stopniu 1). Pokaż, że oczekiwany czas odwiedzenia wszystkich wierzchołków lizaka podczas spaceru losowego wynosi:

(i) $\Theta\left(n^2\right)$ przy założeniu, że startujemy w v;
(ii) $\Theta\left(n^3\right)$ przy założeniu, że startujemy w u.

Zadanie 12. Niech G_n będzie grafem na $3n+1$ wierzchołkach

$$\{r, a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-1}\}$$

takim, że $G[\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}]$, $G[\{b_0, \ldots, b_{n-1}\}]$, $G[\{c_0, \ldots, c_{n-1}\}]$ są klikami i poza krawędziami w tych klikach G_n ma dokładnie trzy krawędzie ra_0, rb_0 i rc_0. Jaki jest oczekiwany czas odwiedzenia wszystkich wierzchołków w spacerze losowym po G_n rozpoczynającym w r? Wystarczy podać asymptotykę względem n.

Zadanie bonusowe do spisania

Rozważ łańcuch Markowa opisujący spacer losowy po dwuwymiarowej kracie całkowitoliczbowej (każdy wierzchołek ma 4 sąsiadów i spacer wybiera kolejny wierzchołek jednostajnie po sąsiadach aktualnego wierzchołka).

Problem 1. Sprawdź, czy każdy ze stanów tego łańcucha jest chwilowy, powracający, czy też silnie powracający.

Problem 2. Jak to wygląda w trzech i więcej wymiarach?

Problemy są warte po $\frac{1}{2}$ punkta każdy. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu w terminie do wtorku 28.11.2023 do godziny 23:59.