Łańcuchy Markowa

Zadanie 1. Rozważ dwustanowy proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$, który jest definiowany przez dwie macierze P oraz Q, obie rozmiaru 2×2. W parzystych krokach macierz P definiuje przejścia pomiędzy stanami, zaś w nieparzystych macierz Q. Uzasadnij dlaczego ten proces nie zawsze spełnia własność Markowa. Podaj analogiczny proces, ale z większą liczbą stanów, który już spełnia własność Markowa, tzn. podaj proces $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ oraz funkcję f ze zbioru stanów procesu (Y_t) w zbiór stanów (X_t) takie, że (1) $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Markowa, (2) $(f(Y_t))$ jest takim samym procesem co (X_t).

Zadanie 2. Pokaż, że w skończonym łańcuchu Markowa:

(i) co najmniej jeden stan jest rekurencyjny
(ii) każdy stan rekurencyjny jest pozytywnie rekurencyjny

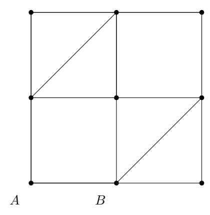
Zadanie 3. Dany jest n stanowy łańcuch Markowa opisywany macierzą P i z rozkładem stacjonarnym $\bar{\pi}$. Niech $X_0, \ldots, X_m$ będą początkowymi krokami łańcucha przy założeniu, że startujemy w X_0 z rozkładem stacjonarnym $\bar{\pi}$. Rozważ zmienne X_i w odwrotnej kolejności tj. $X_m, \ldots, X_0$.

(i) Pokaż, że zmienne w odwróconej kolejności tworzą łańcuch Markowa.
(ii) Pokaż, że odwrócony łańcuch dany jest macierzą przejścia $Q_{i,j} = \frac{\pi_j P_{j,i}}{\pi_i}$.
(iii) Pokaż, że jeśli oryginalny łańcuch jest *czasowo odwracalny* (czyli $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$), to $Q = P$.

Zadanie 4. Mysz i kot niezależnie od siebie przemieszczają się w sposób losowy po spójnym, nieskierowanym i niedwudzielnym grafie G. Niech $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$. Pokaż, że $O\left(m^2 n\right)$ jest ograniczeniem górnym na oczekiwaną liczbę kroków, po której dojdzie do spotkania. *Wskazówka*: rozważ łańcuch Markowa na parach indeksów (a, b).

Zadanie 5. Rozważ spacer losowy po grafie przedstawionym na rysunku. Spacer startuje z wierzchołka A. Rozważ stowarzyszony z nim łańcuch Markowa $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie stanami są wierzchołki grafu oraz $X_0 = A$.

(i) Wyznacz $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = A)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = B)$.
(ii) Jaka jest oczekiwana liczba odwiedzeń wierzchołka B przed pierwszym powrotem do A?



Zadanie 6. Graf L_n nazywany jest lizakiem i zdefiniowany jest następująco. Wierzchołki $\{1, \ldots, n/2\}$ tworzą klikę $K_{n/2}$, niech u będzie jednym z wierzchołków tej kliki. Pozostałe $n/2$ wierzchołków w połączeniu z u tworzą ścieżkę indukowaną na $n/2+1$ wierzchołkach. Niech v będzie najbardziej odległym od kliki wierzchołkiem należącym do ścieżki (jedyny wierzchołek w lizaku o stopniu 1). Pokaż, że oczekiwany czas odwiedzenia wszystkich wierzchołków lizaka podczas spaceru losowego wynosi:

(i) $\Theta\left(n^2\right)$ przy założeniu, że startujemy w v;
(ii) $\Theta\left(n^3\right)$ przy założeniu, że startujemy w u.

Zadanie 7. (*bonusowe:* 0,5 *punktu*) Rozważ łańcuch Markowa opisujący spacer losowy po dwuwymiarowej kracie całkowitoliczbowej (każdy wierzchołek ma 4 sąsiadów i spacer wybiera kolejny wierzchołek jednostajnie po sąsiadach aktualnego wierzchołka). Sprawdź, czy każdy ze stanów tego łańcucha jest chwilowy, rekurencyjny, czy też pozytywnie rekurencyjny. Jak to wygląda w trzech wymiarach?