Rozkład jednostajny, Igła Buffona

Zadanie 1 (Paradoks Bertranda)**.** Z ustalonego okręgu wylosowano cięciwę. Jaka jest szansa na to, że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg? Znajdź (np. na Wikipedii) różne sposoby formalizacji takiego doświadczenia, tak aby odpowiedzią na tak postawione pytanie było $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{2}$.

Zadanie 2. Niech X będzie zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Jaki rozkład mają zmienne $Y = \min(X, 1 - X)$ i $Z = \max(X, 1 - X)$. Podaj formalny dowód!

Zadanie 3. Niech X oraz Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Znajdź gęstość, dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych

(i) $Z = X + Y$;
(ii) $Z = X - Y$;
(iii) $Z = |X - Y|$.

Zadanie 4. Dwójka przyjaciół chodzi do szkoły razem. Każdy z nich niezależnie przybywa na umówione skrzyżowanie o godzinie będącej zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $7 : 00 - 7 : 20$ i czeka na kompana 5 minut. Po tym czasie jeśli przyjaciel nie przyszedł osoba idzie sama do szkoły. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przyjaciele pójdą razem?

Zadanie 5. Z kwadratu o boku 1 losujemy jednostajnie i niezależnie dwa punkty A oraz B. Wyznacz oczekiwaną długość odcinka AB.

Zadanie 6. Z kwadratu o boku 1 losujemy jednostajnie punkt P. Punkt P wraz z bokami kwadratu tworzy 4 trójkąty. Wyznacz oczekiwane pole największego trójkąta.

Zadanie 7. Z ustalonego okręgu losujemy jednostajnie i niezależnie 3 punkty A, B oraz C. Jakie jest prawdopodobieństwo, że środek okręgu leży wewnątrz trójkąta ABC?

Zadanie 8. Łamiemy kij w dwóch niezależnie i jednostajnie wybranych punktach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z otrzymanych kawałków można zbudować trójkąt?

Zadanie 9. Łamiemy kij długości 1 w jednostajnie losowo wybranym punkcie.

(i) Jaka jest oczekiwana długość krótszej części?
(ii) Jaki jest oczekiwany stosunek długości części krótszej do części dłuższej?
(iii) Jaki jest oczekiwany stosunek długości części dłuższej do części krótszej?

Zadanie 10. Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że najbliższa liczba całkowita do ilorazu X/Y jest parzysta? Wynik przedstaw w formie $a + b\pi$.

Zadanie 11. Losujemy n przedziałów $I_1, \ldots, I_n$ w następujący sposób: konstruując i-ty przedział losujemy niezależnie i jednostajnie jego oba końce z przedziału $[0, 1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że istnieje punkt p należący do wszystkich wylosowanych przedziałów?

Do zadania 12 publikujemy na stronie dwa dowody (tutaj pierwszy; drugi pojawi się trochę później niż zestaw). Zadaniem jest rozwiązać zadanie samemu lub zrozumieć treść dodatkowych materiałów.

Zadanie 12. (igła Buffona) Płaszczyznę przecięto zbiorem poziomych linii. Odstęp między dwoma sąsiednimi liniami wynosi d. Rzucamy igłą długości ℓ na tę płaszczyznę. Wyznacz prawdopodobieństwo przecięcia linii.

Zadanie 13. (krzyżyk Buffona) Na płaszczyznę przeciętą równoległymi liniami o odstępie 1 rzucono dwie jednostkowe igły sklejone prostopadle środkami. Niech Z będzie liczbą przecięć tak utworzonego krzyżyka z liniami. Policz $\mathrm{E}(Z)$ i $\mathrm{Var}(Z)$.

Zadanie 14. Wybierz punkt X w sposób losowy i jednostajny z okręgu O o średnicy 1 i o środku w punkcie $(0, 10)$. Rozważ średnicę O o końcu w punkcie X. Jaka jest oczekiwana długość projekcji tej średnicy na oś OX?

Zadanie 15. Z kwadratu jednostkowego $[0, 1] \times [0, 1]$ losujemy punkt w sposób jednostajny. Później niezależnie wybieramy kąt w sposób jednostajny na $[0, 2\pi]$. Z jakim prawdopodobieństwem odcinek jednostkowy rozpoczynający się w wylosowanym punkcie zmierzający w kierunku wylosowanego kąta wychodzi poza rozważany kwadrat?

Zadanie bonusowe do spisania

Problem 1. Obejrzyj film: youtube link (kanał: 3Blue1Brown, tytuł: A tale of two problem solvers).

Do rozwiązania następnych trzech problemów wymagana jest znajomość treści filmu.

Problem 2. Sformułuj ogólną wersję twierdzenia udowodnionego przez Alice. Napisz dowód tego twierdzenia w języku, którego używamy na tym kursie (zmienne losowe, rozkłady itp.). Pomocne mogą być materiały dodatkowe o problemie z igłą Buffona zamieszczone na stronie (w szczególności o dowodzie z księgi).

Problem 3. Odpowiedz na pytanie zadane przez narratora pod koniec filmu: w którym momencie Alice założyła coś na temat rozkładu rotacji bryły? Odpowiedź powinna znajdować się w rozwiązaniu Problemu 2, np. zaznaczona kolorem.

Problem 4. Mając do dyspozycji generator liczb z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$ skonstruuj generator losowych punktów na sferze. Rozkład powinien być jednostajny po powierzchni sfery, innymi słowy dokładnie taki jakiego użył Bob.

Do rozwiązania tego problemu nie trzeba oglądać filmu, ale zawiera on (prawie) rozwiązanie tego zadania.

Problem 5. Pan Buffon połknął igłę i zostaje prześwietlony. Jeżeli założymy, że igła może ustawić się w dowolny sposób wewnątrz, jaki jest rozkład długości igły widzianej na zdjęciu rentgenowskim? Podaj dystrybuantę lub gęstość. Jaka jest wartość oczekiwana długości igły na zdjęciu?

Problemy są warte (w kolejności) $0.4 + 0.4 + 0.1 + 0.3 + 0.3 = 1.5$ punktu. Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu w terminie do niedzieli 24 grudnia do pierwszej gwiazdki.