

Igła Buffona i rozkład wykładniczy

Zadanie 1. Niech X oraz Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem 1. Znajdź gęstość i dystrybuantę zmiennej $Z = X + Y$.

Zadanie 2. Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem 1. Wyznacz wartość oczekiwaną k -tej wartości w posortowanym ciągu tych zmiennych.

Zadanie 3. Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem 1.

- (i) Pokaż, że $X_1 + X_2$ nie jest zmienną z rozkładu wykładniczego.
- (ii) Niech N będzie zmienną losową z rozkładu geometrycznego z parametrem p . Pokaż, że $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ jest zmienną z rozkładu wykładniczego o parametrze p .

Zadanie 4.

- (i) Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z wartością oczekiwaną $\mathbf{E}[X_i] = 1$. Dla danego k niech $N(k) = \min\{n : \sum_{i=1}^n X_i > k\}$. Wyznacz $\mathbf{E}[N]$.
- (ii) Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Dla danego $k \in (0, 1)$ niech $N(k) = \min\{n : \prod_{i=1}^n X_i < k\}$. Wyznacz $\mathbf{E}[N]$.

Zadanie 5. (krzyżyk Buffona) Na płaszczyznę przeciętą równoległymi liniami o odstępach 1 rzucono dwie jednostkowe igły sklejone prostopadle środkami. Niech Z będzie liczbą przecięć tak utworzonego krzyżyka z liniami. Policz $\mathbf{E}(Z)$ i $\mathbf{Var}(Z)$.

Zadanie 6. Z kwadratu jednostkowego $[0, 1] \times [0, 1]$ losujemy punkt w sposób jednostajny. Później niezależnie wybieramy kąt w sposób jednostajny na $[0, 2\pi]$. Z jakim prawdopodobieństwem odcinek jednostkowy rozpoczynający się w wylosowanym punkcie zmierną w kierunku wylosowanego kąta wychodzi poza rozważany kwadrat?

Zadanie 7. (bonusowe +0.5 punktu) Pan Buffon połknął igłę i zostaje prześwietlony. Jeżeli założymy, że igła może ustawić się w dowolny sposób wewnątrz, jaki jest rozkład długości igły widzianej na zdjęciu rentgenowskim?