Rozkład normalny, rozkład Cauchy'ego i CTG

Zadanie 1. Niech X będzie zmienną ze standardowego rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$. Wyznacz wszystkie momenty zmiennej X, tj. $E\left(X^k\right)$ dla każdego naturalnego k.

Zadanie 2. Niech X będzie zmienną losową z rozkładu normalnego $N(0, \sigma)$, zaś Z zmienną przyjmującą wartość ze zbioru $\{-1, +1\}$ z rozkładem jednostajnym. Niech $Y = XZ$.

(i) Pokaż, że zmienna Y ma rozkład $N(0, \sigma)$.
(ii) Wyjaśnij dlaczego zmienne X, Y nie są niezależne.
(iii) Pokaż, że zmienne X, Y są nieskorelowane (czyli $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$).

Zadanie 3. Załóżmy, że mamy do dyspozycji generator liczb z rozkładu jednostajnego z przedziału $[0, 1]$. Naszym celem będzie wygenerowanie liczb z rozkładu normalnego $N(0, 1)$. Niech U, V będą wygenerowanymi niezależnie wartościami na $[0, 1]$. Procedura wygląda następująco. Jeśli $U^2 + V^2 > 1$ to odrzucamy wynik i próbujemy jeszcze raz. W przeciwnym przypadku niech $S = \sqrt{U^2 + V^2}$ i niech

$$X = U\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}, Y = V\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}.$$

Udowodnij, że X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu $N(0, 1)$. Pamiętaj o wstępnym warunkowaniu! Wskazówka: przeczytaj sekcję 9.5 w podręczniku.

Zadanie 4. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi o takich samych rozkładach. Niech $U = X + Y$ i $V = X - Y$.

(i) Wykaż, że U, V są nieskorelowane
(ii) Podaj przykład X, Y takich, że U, V nie są niezależne.
(iii) Udowodnij, że jeśli X, Y mają rozkład $N(0, 1)$ to U, V są niezależne.
(iv) Korzystając z poprzedniego punktu udowodnij, że $\Phi(\frac{u+v}{2})\Phi(\frac{u-v}{2}) = \Phi(\frac{u}{\sqrt{2}})\Phi(\frac{v}{\sqrt{2}})$, gdzie Φ to dystrybuanta $N(0, 1)$.

Zadanie 5. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi z rozkładu $N(0, 1)$ i niech $Z = X + Y$. Wykaż, że

$$\mathrm{E}(Z|X > 0, Y > 0) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Zadanie 6. Rozważmy następujący eksperyment. Stojąc na przeciwko bardzo długiej ściany wprawiamy latarkę w ruch obrotowy i obserwujemy losowy punkt na ścianie na którym zatrzyma się światło latarki. Dla ustalenia uwagi, powiedzmy że stoimy w punkcie $(0, 1)$ a ścianą jest oś OX. Niech X będzie współprzędną punktu na osi OX w który zwrócony jest światło latarki. Jeśli światło nie jest zwrócone na ścianę to możemy powtarzać eksperyment do skutku.

(i) Udowodnij, że dystrybuanta i gęstość zmiennej X zadane są przez

$$\mathrm{P}(X < x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}(x), \qquad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

(ii) Jaka jest $\mathrm{E}(X)$? A jaka jest $\mathrm{E}(X \mid X > 0)$?

(iii) Jeśli zmienna X jest zdefiniowana w analogiczny sposób jak powyżej, ale zamiast punktu $(0,1)$ bierzemy punkt (x_0, γ) to mówimy, że X ma *rozkład Cauchy'ego* z parametrem (x_0, γ). Rozkład Cauchy'ego z parametrem $(0,1)$ nazywamy *standardowym rozkładem Cauchy'ego*. Wyznacz dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję dla rozkładu Cauchy'ego.

Zadanie 7. Mając do dyspozycji generator liczb losowych z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0,1]$ zaprojektuj generator liczb z rozkładu Cauchy'ego.

Zadanie 8. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie w $N(0,1)$. Jaki rozkład ma zmienna X/Y?

Zadanie 9. Niech (X, Y) będą punktem wylosowanym jednostajnie ze zbioru $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$ (czyli jednostkowego półkola). Jaki rozkład ma zmienna X/Y?

Pozostałe zadanie z zestawu rozwiązujemy poprzez aplikację CTG. Przyjmujemy, jak fizycy, że podane próbki są wystarczająco duże aby przybliżyć rozkład przez rozkład graniczny.

Zadanie 10. Czas obsługi i-tego klienta dany jest zmienną losową o wartości oczekiwanej wynoszącej 2 minuty oraz wariancji równej 1 minucie. Zmienne opisujące każdego z klientów są niezależne. Niech Y oznacza sumaryczny czas obsługi 50 klientów. Wyznacz $\mathrm{P}(90 \leqslant Y \leqslant 110)$.

Zadanie 11. Niech Y będzie zmienną z rozkładu dwumianowego z parametrami $n = 20$ oraz $p = \frac{1}{2}$. Wyznacz $\mathrm{P}(8 \leqslant Y \leqslant 10)$ dokładnie. Następnie rozpisz Y jako sumę indykatorów i wyznacz to samo prawdopodobieństwo za pomocą Centralnego Twierdzenia Granicznego. Różnica pomiędzy tymi dwoma wynikami wynika z faktu, iż przybliżamy rozkład dyskretny z małym n za pomocą rozkładu ciągłego. Sytuację można poprawić zauważając, że dla Y zachodzi $\mathrm{P}(8 \leqslant Y \leqslant 10) = \mathrm{P}(7.5 \leqslant Y \leqslant 10.5)$. Wyznacz szukane prawdopodobieństwo po zastosowaniu tej poprawki oraz porównaj otrzymane wyniki numerycznie.

Zadanie 12. Zaprosiłeś na przyjęcie 64 gości. Zakładając, że każdy z nich będzie chciał zjeść niezależnie od pozostałych 0, 1 albo 2 kanapki z prawdopodobieństwami $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{4}$ odpowiednio, ile kanapek musisz przygotować, aby mieć 95% pewności, że ich nie zabraknie?

Zadanie 13. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$. Niech $\bar{X}$ będzie średnią arytmetyczną tego ciągu. Jak duże musi być n, aby $\mathrm{P}\left(0.9 \leqslant \bar{X} \leqslant 1.1\right) \geqslant 0.95$?