Proces Poissona

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli $\{N(t) \mid t \geqslant 0\}$ jest stochastycznym procesem takim, że

(i) $N(0) = 0$,
(ii) czasy pomiędzy zliczanymi zdarzeniami są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem λ,

to $\{N(t) \mid t \geqslant 0\}$ jest procesem Poissona z parametrem λ. (To jest twierdzenie 8.11 z książki.)

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli rodzielamy proces Poissona $\{N(t)\}$ z parametrem λ: przydzielając każde zdarzenie niezależnie z prawdopodobieństwem p do procesu $\{N_1(t)\}$ i z prawdopodobieństwem $1 - p$ do procesu $\{N_2(t)\}$, to otrzymane nowe procesy są niezależnymi procesami Poissona. (Dowód tego faktu był niedokończony na wykładzie, a w książce również jest w części pozostawiony jako ćwiczenie.)

Procesem Markowa nazywamy proces stochastyczny czasu ciągłego $\{X(t) | t \geqslant 0\}$, który spełnia tzw. Własność Markowa

$$\forall_{s,t} : \mathbf{P}\left(X(s+t) = x | X(u), 0 \leqslant u \leqslant t\right) = \mathbf{P}\left(X(s+t) = x | X(t)\right)$$

Na proces ten można patrzeć jak na złożenie dwóch procesów:

1. Łańcucha Markowa danego macierzą przejścia $P_{i,j}$ (proces dyskretnego czasu)
2. Wektora parametrów $(\theta_1, \theta_2, \ldots)$, który określa ile czasu proces spędza w stanie i nim go zmieni. Konkretnie czas postoju w stanie i określony jest rozkładem wykładniczym z parametrem θ_i.

Rozkład stacjonarny dla Procesu Markowa nie jest tym samym co rozkład stacjonarny dla Łańcucha Markowa. Podobnie jak w przypadku dyskretnym rozkład ten określa asymptotyczne prawdopodobieństwo tego, że proces znajduje się w konkretnym stanie. Rozkład stacjonarny spełnia następującą zależność:

$$\pi_i \theta_i = \sum_k \pi_k \theta_k p_{k,i}$$

gdzie $p_{k,i}$ są elementami macierzy przejścia Łańcucha Markowa.

Standardową notacją dla kolejek jest $Y/Z/n$, gdzie Y określa dystrybucję klientów przychodzących, Z dystrybucję czasu obsługi klienta, zaś n liczbę dostępnych serwerów. Literą M oznacza się standardowy proces Markowa, więc napis $M/M/n$ oznacza kolejkę obsługiwaną przez n serwerów, gdzie klienci przychodzą zgodnie z procesem Poissona oraz czas obsługi jest z rozkładu wykładniczego. Zwykłe kolejki określają także kolejność przetwarzania, jeśli takowa nie jest wyspecyfikowana, standardowym podejściem jest FIFO.

Zadanie 3. Przeczytaj i opanuj materiał z sekcji 8.5 (Continuous Time Markov Processes) oraz 8.6.1 i 8.6.2 o kolejkach Markowa.

Zadanie 4 (Model Ehrenfesta)**.** Pojemnik zawierający w sumie n cząstek, jest przedzielony na dwie części błoną półprzepuszczalną. Każda z cząstek, niezależnie od pozostałych, przechodzi do przeciwnej części po czasie będącym zmienną losową z rozkładu wykładniczego z parametrem 1.

(i) Wyznacz rozkład stacjonarny tego procesu.
(ii) Który stan w rozkładzie stacjonarnym ma największe prawdopodobieństwo, dlaczego?

Zadanie 5. Maszyna, nim ulegnie awarii, pracuje nieprzerwanie przez liczbę godzin będącą zmienną losową X z rozkładu wykładniczego z parametrem 0,1. W momencie wystąpienia awarii natychmiastowo podejmowane są działania naprawcze, które zajmują Y godzin, gdzie Y jest zmienną losową z rozkładu wykładniczego z parametrem 0,9 oraz niezależną od X. Po dokonaniu naprawy cały cykl się powtarza.

(i) Pokaż, że ten proces jest Procesem Markowa.
(ii) Wyznacz macierz przejścia Łańcucha Markowa stowarzyszonego z tym procesem.
(iii) Wyznacz rozkład stacjonarny Procesu Markowa oraz rozkład stacjonarny Łańcucha Markowa stowarzyszonego z tym procesem.
(iv) Asymptotycznie jaki jest procent czasu spędzony w naprawie?
(v) Podczas pracy maszyna przynosi dochód w wysokości \$60 na godzinę pracy. Naprawa kosztuje \$30 za godzinę. Jaki jest długoterminowy średni dochód netto?