Sprzęganie łańcuchów Markova

Zadanie 1. Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markova na skończonej przestrzeni stanów S. Dla $y \in S$, niech $m_y = \min_{x \in S} P(x, y)$. Skonstruuj sprzęganie $((X_t, Y_t))_{t \in \mathbb{N}}$ łańcuchów Markova z macierzą przejścia P takie, że dla każdego $t \geqslant 0$ i $z \in S$ mamy

$$\mathrm{P}(X_t = Y_t = z) \geqslant m_z.$$

Dla wygody przypominamy definicję nieokresowości macierzy. Niech P będzie macierzą przejścia nad zbiorem stanów S. Niech $x \in S$. Wtedy $\mathcal{T}(x) = \{t \geqslant 1 \mid P^t(x, x) > 0\}$ i definiujemy *okres* stanu x jako $\gcd(\mathcal{T}(x))$. Łańcuch Markowa ze zbiorem stanów S i macierzą P jest *nieokresowy* jeśli każdy $x \in S$ ma okres równy 1.

Zadanie 2. Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha nieredukowalnego i nieokresowego na skończonej przestrzeni stanów S. Pokaż, że istnieje liczba całkowita $r_0 \geqslant 1$ taka, że dla każdych $r \geqslant r_0$ i $x, y \in S$ mamy $\mathrm{P}^r(x, y)$.

Wskazówka: Przyda się następujący fakt (Tożsamość Bézouta) dowodliwy prosto z algorytmu Euklidesa: Dla każdych liczb całkowitych $s \geqslant 1$, $n_1, \ldots, n_s \geqslant 1$ takich, że $\gcd(\{n_1, \ldots, n_s\}) = 1$ istnieją liczby całkowite $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ takie, że

$$\alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_n c_n = 1$$

Zadanie 3. Rozważmy łańcuch Markova $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ na zbiorze $\{0, \ldots, k-1\}$ zdefiniowany następująco. Dla każdego $t \geqslant 0$, X_{t+1} otrzymujemy z X_t poprzez dodanie wyniku z rzutu sześcienną sprawiedliwą kostką i wzięcie reszty z dzielenia przez k. Udowodnij, że dla $k = 10$, $\tau_{\mathrm{mix}} < 100$.

Poniższe zadanie tłumaczy dlaczego koncetrujemy się na $\tau_{\mathrm{mix}} = \tau(1/4)$ zamiast rozważać $\tau_{\mathrm{mix}}(\varepsilon)$ dla dowolnych $\varepsilon > 0$.

Zadanie 4. (Twierdzenie 12.6 z książki) Niech P będzie macierzą przejścia nieredukowalnego i nieokresowego łańcucha Markova na skończonej przestrzeni stanów. Załóżmy, że istnieje stała $c < \frac{1}{2}$ i $T \geqslant 0$ takie, że $\tau(c) \leqslant T$. Pokaż, że $\tau(\varepsilon) \leqslant \lceil \ln \varepsilon / \ln(2c) \rceil T$.

Wskazówka do niektórych kolejnych zadań: Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markova na zbiorze stanów S. Niech π będzie rozkładem prawdopodobieństwa na S. Łatwo uzasadnić, że jeśli dla każdego $x, y \in S$ mamy

$$\pi(x) P(x, y) = \pi(y) P(y, x)$$

to π jest rozkładem stacjonarnym.

Zadanie 5. Następujący łańcuch Markova pojawił się w drugiej części wykładu. Niech G będzie skończonym grafem z co najmniej jedną krawędzią. Rozważmy łańcuch Markova, gdzie przestrzeń stanów $\Omega(G)$ jest rodziną wszystkich zbiorów niezależnych w G. Krok ze stanu M_t do następnego stanu działa następująco. Losujemy jednostajnie $v \in V(G)$. Jeśli $v \in M_t$ to $M_{t+1} = M_t \backslash \{v\}$. Jeśli $v \notin M_t$ to próbujemy dodać v do M_t. To znaczy, jeśli $M_t \cup \{v\}$ jest zbiorem niezależnym w G to $M_{t+1} = M_t \cup \{v\}$, a w przeciwnym przypadku $M_{t+1} = M_t$. Udowodnij, że ten łańcuch jest nieredukowalny, nieokresowy i jego rozkład stacjonarny jest jednostajny.

Zadanie 6. Następujący łańcuch Markova pojawił się w pierwszej części wykładu. Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem i niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą taką, że

$$k < \frac{n+2}{\Delta(G)+1}.$$

Rozważamy łańcuch Markova, gdzie przestrzeń stanów $\Omega_k(G)$ jest rodziną wszystkich k-elementowych zbiorów niezależnych w G. Krok ze stanu M_t do następnego stanu działa następująco. Losujemy jednostajnie i niezależnie: $v \in M_t$, $w \in V(G)$. Wtedy $M_{t+1} = m(v, w, M_t)$ czyli: jeśli $M_t - \{v\} + \{w\}$ jest zbiorem niezależnym to $M_{t+1} = M_t - \{v\} + \{w\}$; wpp. $M_{t+1} = M_t$. Udowodnij, że ten łańcuch jest nieredukowalny, nieokresowy i jego rozkład stacjonarny jest jednostajny.

Zadanie 7. Następujący łańcuch Markova pojawił się w drugiej części wykładu. Niech G będzie skończonym grafem spójnym. Rozważmy łańcuch Markova, gdzie przestrzeń stanów $\Omega(G)$ jest rodziną wszystkich zbiorów niezależnych w G. Krok ze stanu M_t do następnego stanu działa następująco. Losujemy jednostajnie i niezależnie: $e \in E(G)$, $p \in \{1, 2, 3\}$. Jeśli $p = 1$ to $M'_t = M_t \backslash \{u, v\}$. Jeśli $p = 2$ to $M'_t = M_t \backslash \{u\} \cup \{v\}$. Jeśli $p = 3$ to $M'_t = M_t \backslash \{v\} \cup \{u\}$. Jeśli M'_t jest zbiorem niezależnym w G to $M_{t+1} = M'_t$, a wpp. $M_{t+1} = M'_t$. Udowodnij, że ten łańcuch jest nieredukowalny, nieokresowy i jego rozkład stacjonarny jest jednostajny.

Zadanie 8. Przeczytaj sekcję 11.4.1 (może być pomocne przeczytanie całej sekcji 11.4, której część była zreferowana na wykładzie).

Zadanie 9. Korzystając z techniki pokazanej w sekcji 11.4.1 skonstruuj łańcuch Markova o następującej własności. Niech G będzie skończonym grafem. Niech przestrzenią stanów będą wszystkie niepuste zbiory niezależne $\Omega'(G) = \Omega(G) \backslash \{\emptyset\}$. Chcemy aby rozkład stacjonarny tego łańcucha był wyrażony wzorem $\pi_I = \frac{|I|}{B}$ dla każdego $I \in \Omega'(G)$, gdzie B jest taką stałą, aby $\sum_{I \in \Omega'(G)} \pi_I = 1$. Pamiętaj, że aby móc zaaplikować Lemat 11.8 jest wymagane, aby nasz łańcuch był nieredukowalny i nieokresowy!

Zadanie 10. Niech $p, q \in (0, 1)$ takie, że $p+q = 1$ i niech $n \geqslant 3$. Rozważ łańcuch Markova

$(M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ na zbiorze wierzchołków n-wierzchołkowego cyklu taki, że jeśli $M_t = v$ to

$$M_{t+1} = v \text{ z prawd. } \frac{1}{2}$$
$$M_{t+1} \text{ jest sąsiadem } v \text{ zgodnie z wskazówkami zegara z prawd. } \frac{p}{2}$$
$$M_{t+1} \text{ jest sąsiadem } v \text{ przeciwnie do wskazówek zegara z prawd. } \frac{q}{2}$$

Zauważ, że $(M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ma rozkład stacjonarny istnieje i jest on jednostajny. Wykaż, że istnieją dodatnie stałe α, β takie, że

$$\alpha n^2 \leqslant \tau_{\text{mix}} \leqslant \beta n^2.$$

Wskazówka 1: nam wyszło $\alpha = \frac{1}{32}$ i $\beta = 1$.

Wskazówka 2 (ograniczenie górne): Zaprojektuj sprzęganie (X_t, Y_t) takie, że jeśli $X_t \neq Y_t$ to tylko jeden łańcuch się "porusza" w danym kroku. Niech d_t będzie odległością zgodną z kierunkiem wskazówek zegara pomiędzy X_t a Y_t. Rozważ jak zmienia się d_t.

Wskazówka 3 (ograniczenie dolne): Zamodeluj łańcuch z treści jako łańcuch na $\mathbb{Z}$. Jako zbiór A_t świadczący o tym, że τ_{mix} jest duże, weź połowę cyklu przeciwną do oczekiwanej projekcji spaceru na $\mathbb{Z}$ na cykl. Zaaplikuj nierówność Czebyszewa aby ograniczyć $P(X_t \in A_t)$.

W następnym zadaniu może sie przydać następujący fakt. Jeśli $p, q, r \in [0, 1]$ takie, że $p+q+r = 1$ i rozważamy spacer na liczbach $[0, n]$ taki, że prawdopodobieństwo pozostania w miejscu to r, prawdopodobieństwo przejścia z i do $i-1$ wynosi p, a prawdopodobieństwo przejścia z i do $i+1$ wynosi q. Jeśli jesteśmy w punkcie 0 i mamy iść w lewo to zostajemy w miejscu, a jeśli jesteśmy w punkcie n i mamy iść w prawo to również zostajemy w miejscu. Niech X będzie zmienną losową będącą liczbą kroków potrzebnych do przejścia z n do 0. Wtedy

$$\mathrm{E}(X) \leqslant \frac{1}{p-q}\left[n - q\left(\frac{1-(q/p)^n}{p-q}\right)\right].$$

Zadanie 11. Niech T_n będzie pełnym drzewem binarnym na n wierzchołkach. Rozważmy spacer losowy po T_n, gdzie z prawdopodobieńwem $\frac{1}{2}$ stoimy w miejscu, a jeśli mamy wykonać ruch to wykonujemy go jednostajnie na jednego z sąsiadów. Zauważ, że rozkład stacjonarny odpowiednio zdefiniowanego łańcucha Markova istnieje i jest jednostajny po $V(T_n)$. Pokaż, że τ_{mix} jest liniowy w terminach n.

Zadanie 12. Niech (X_t, Y_t) będzie sprzęganiem łańcuchów Markova i niech d_t będzie pewną całkowitoliczbową nieujemną funkcją odległości między stanami X_t i Y_t. Niech d^* będzie maksymalną możliwą wartością d_t. Załóżmy, że dla każdego $t \geqslant 0$ mamy $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$, ponadto $d_{t+1} \in \{d_t - 1, d_t, d_t + 1\}$ oraz istnieje $\gamma > 0$ taka, że $\mathrm{P}(d_t \neq d_{t+1}) \geqslant \gamma$. Podaj ograniczenie na $\tau(\varepsilon)$ w terminach ε, d^*, γ. Ograniczenie powinno być wielomianowe ze względu na d^* i $\frac{1}{\gamma}$.

Wskazówka: potraktuj wartości d_t jak spacer losowy.

Zadanie bonusowe do spisania (0.5pkt)

Problem 1. Rozważ łańcuch Markova $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ modelujący tasowanie talii n kart jak na wykładzie. To jest, dla każdego $t \geqslant 0$, jeśli X_t jest permutacją kart to X_{t+1} otrzymujemy z X_t przez wybranie jednostajnie losowej karty z talii i przełożenie jej na wierzch. Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha i π rozkładem stacjonarnym (który wiemy, że jest jednostajny po wszystkich permutacjach). Widzieliśmy, że $\tau_{\mathrm{mix}} < n \ln n + n \ln 4 =: t_0$, czyli jeśli $t \geqslant t_0$ to dla każdej permutacji x zbioru kart mamy $\|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} < \frac{1}{4}$. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $t_1 = \lceil (1-\varepsilon) n \ln n \rceil$. Wykaż, że dla każdej permutacji x zbioru kart mamy

$$\|P^{t_1}(x,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} > 1 - f(n),$$

gdzie $f(n)$ zmierza do 0 w granicy.

Przypominamy, że rozwiązania spisane **na komputerze** należy wysyłać na adres podany na stronie internetowej kursu w terminie do niedzieli 21 stycznia o 23:59.