Kolokwium I

Zadanie 1. Dany jest rozkład prawdopodobieństwa określony na liczbach całkowitych wzorem $\mathbf{P}(X = i) = ca^{|i|}$, gdzie $a < 1$ jest pewną stałą. Wyznacz:

(i) (`1 pkt`) stałą c oraz wartość oczekiwaną X,
(ii) (`1 pkt`) wariancję X,
(iii) (`0.5 pkt`) funkcję tworzącą momenty X,
(iv) (`1 pkt`) nierówność Chernoffa $\mathbf{P}(X \geqslant x) \leqslant f(a, x)$ (podstaw $t = \ln(1 + a)$), oraz określ dla jakich wartości parametru a takie podstawienie jest dopuszczalne.

Zadanie 2. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = X^2$.

(i) (`0.5 pkt`) Pokaż, że X i Y są zależne.
(ii) (`0.5 pkt`) Pokaż, że $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$.

Zadanie 3 (`1.5 pkt`)**.** Pięć pionków jest losowo rozłożonych na planszy rozmiaru 8×8, w taki sposób, że na każdym polu jest co najwyżej jeden pionek. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną i wyznacz prawdopodobieństwo, że w każdej kolumnie i w każdym wierszu znajduje się co najwyżej 1 pionek.

Zadanie 4 (`2 pkt`)**.** W walentynki, jak to co roku bywa, wiele par wybiera się do kina. Wszystkie sale w kinie "Niepewność" składają się z dwóch rzędów pięcioosobowych oraz trzech rzędów dziesięcioosobowych. 20 par zakupiło bilety na walentynkowy seans, jednak doszło do awarii systemu rezerwacji i każdemu z widzów zostało przydzielone losowe miejsce na widowni. Ile par w oczekiwaniu siedzi koło siebie (na sąsiednich miejscach w tym samym rzędzie)?

Zadanie 5. Rozwiązujesz test końcowy z rachunku prawdopodobieństwa, który jest testem wyboru (każde pytanie to 4 możliwości, jedna poprawna). Przed testem dużo ćwiczyłeś i opanowałeś perfekcyjnie 70% materiału. Pytania na teście pokrywają materiał wykładu w sposób jednostajny (masz 70% szans, że znasz odpowiedź na losowo wybrane pytanie). Zakładamy, że jeśli znasz odpowiedź na pytanie, to udzielasz poprawnej odpowiedzi, jeśli zaś nie znasz odpowiedzi na dane pytanie, to zaznaczasz jedną z opcji w sposób jednostajnie losowy.

(i) (`0.5 pkt`) Wyznacz oczekiwaną liczbę zdobytych punktów.
(ii) (`0.5 pkt`) Zakładając, że test składa się z 10-ciu pytań, jakie jest prawdopodobieństwo, że uzyskasz co najmniej 90% możliwych do zdobycia punktów?
(iii) (`0.5 pkt`) Jakie jest prawdopodobieństwo, że znałeś odpowiedź na pytanie, na które odpowiedziałeś poprawnie?
(iv) (`0.5 pkt`) Zakładając, że ocena bardzo dobra przyznawana jest od 90%, wolałbyś rozwiązywać test składający się z 10 czy 100 pytań (jeśli chcesz tę piątkę otrzymać)?

Zadanie 6. W paczce ulubionej mieszanki cukierków Oli znajduje się N cukierków. Ola nie przepada za cukierkami o smaku cytrynowym (a tych w paczce jest dokładnie m). Zawładnięta nagłą potrzebą zjedzenia czegoś słodkiego, Ola sięgnęła ręką do pudełka i nie patrząc, wyciągnęła n cukierków.

(i) (`0.5 pkt`) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie i spośród wyjętych cukierków jest o smaku cytrynowym?
(ii) (`1 pkt`) Ile cukierków cytrynowych Ola wyciągnęła w oczekiwaniu?
(iii) (`1 pkt`) Jaka jest wariancja?

Zadanie 7. Zakupiliśmy, jak to stwierdził sprzedawca, idealny generator liczb losowych z rozkładem jednostajnym na zbiorze $\{0,\ldots,9\}$. Zadowoleni z siebie i pewni, że nasza maszyna rzeczywiście jest taką, jak opisał ją sprzedawca, uruchomiliśmy ją i jako pierwsze 10 losowych liczb oczymaliśmy same 7-ki. Oszacuj prawdopodobieństwo tego zdarzenia na bazie nierówności:

(i) (`0.5 pkt`) Markova,
(ii) (`0.5 pkt`) Czebyszewa,
(iii) (`1 pkt`) Chernoffa,
(iv) (`0.5 pkt`) wyznacz dokładny wynik.

Zadanie 8 (`3 pkt`)**.** Zespół muzyczny "Random Beats" cieszy się ogromną popularnością w Stochastolandzie. Fanem zespołu nie jest jednak Wielki Imperator Dystrybucjusz. Z racji tego, że muzyka zespołu działa mu na nerwy, postanowił pojmać jego członków i ich zgładzić. Imperator obawia się jednak buntu w kraju, więc postanawia dać członkom zespołu szansę na ucieczkę od wyroku. Zespół składa się z dziesięciu muzyków, a każdy z nich gra na innym instrumencie. Imperator w losowy sposób powkładał instrumenty do dziesięciu pudeł, które oznakował bez powtórzeń symbolami instrumentów należących do zespołu. Każdy z członków zespołu, w odizolowaniu od reszty (zakazana jest jakakolwiek forma komunikacji), może otworzyć co najwyżej 5 wybranych przez siebie pudeł. Zespół zostanie uwolniony, jeśli wszyscy jego członkowie odnajdą swoje instrumenty. Sytuacja wydaje się beznadziejna, ale perkusista wpadł na pomysł w jaki sposób otwierać pudła, aby szansa na uwolnienie wyniosła przynajmniej 35%. Podaj tę strategię i uzasadnij, że daje ona wymagane prawdopodobieństwo powodzenia.

Zadanie 9 (`3 pkt`)**.** Mamy n magnesów neodymowych w kształcie cienkiego walca. Ustawiamy je losowo w rzędzie w sposób jednostajny po wszystkich możliwościach (i-ty w kolejności magnes może być ustawiony na dwa sposoby: NS albo SN). Jeśli dwa sąsiednie magnesy zwrócone są do siebie przeciwnymi biegunami (tj. NSNS albo SNSN), to się przyciagają, w przeciwnym wypadku się odpychają. *Blokiem* nazywamy ciąg magnesów, w którym każde dwa sąsiednie się przyciągają (po usunięciu wszystkich przeszkód utworzą duży spójny walec). Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję liczby bloków.

Zadanie 10 (`3 pkt`)**.** Rozgrywasz serię s gier ($s \geqslant 2$). i-ta gra jest niezależna od pozostałych i wygrywasz ją z prawdopodobieństwem $\frac{1}{i}$. Otrzymujesz dolara za każde dwie gry wygrane pod rząd. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję liczby wygranych dolarów.

Zadanie 11 (`3 pkt`)**.** Pijany wędrowiec stoi 1 krok od przepaści. W każdej sekundzie z prawdopodobieństwem p oddala się o 1 krok od przepaści, albo z prawdopodobieństwem $1-p$ przybliża się o 1 krok do niej. Wędrowiec spada w przepaść, gdy jego odległość od jej krawędzi wyniesie 0. Z jakim prawdopodobieństwem wędrowiec przeżyje (nie spadnie)?

Zadanie 12 (`4 pkt`). Dany jest cykl C_{2n} oraz dwa pionki umieszczone w losowo wybranych wierzchołkach (każdy pionek losuje swoje położenie w sposób jednostajny oraz niezależny od drugiego z pionków). W każdej rundzie pierwszy z pionków z prawdopodobieństwem $p_1 \in (0,1)$ przemieszcza się z wierzchołka v_i do wierzchołka v_{i+1} (z v_{2n-1} do v_0) albo z prawdopodobieństwem $1-p_1$ przemieszcza się z wierzchołka v_i do wierzchołka v_{i-1} (z v_0 do v_{2n-1}). Analogicznie postępuje drugi z pionków, ale tym razem z prawdopodobieństwem $p_2 \in (0,1)$ bądź $1-p_2$. Mówimy, że pionki się spotkały, jeśli istnieje chwila, w której znajdują się w tym samym wierzchołku (”mijanie” tj. jeden pionek przechodzi $v_i \to v_{i+1}$ a drugi przechodzi $v_{i+1} \to v_i$ nie jest uznawane za spotkanie). Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że w końcu dojdzie do spotkania.

Zadanie 13. Prostokątna plansza rozmiaru $m \times n$ jest pokolorowana w sposób losowy (każde pole jest z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ czarne lub białe). Mówimy, że dwa pola p i q należą do tej samej monochromatycznej spójnej składowej, jeśli istnieje ciąg pól zaczynający się od p i kończący na q taki, że kolejne wyrazy ciągu są sąsiadami na planszy (mają wspólny bok) oraz są w tym samym kolorze. Niech X będzie liczbą monochromatycznych spójnych składowych. Pokaż, że:

(i) (`1 pkt`) $\frac{1}{16}mn \leqslant \mathbf{E}[X]$,
(ii) (`1 pkt`) $\frac{1}{8}mn \leqslant \mathbf{E}[X]$,
(iii) (`2 pkt`) $\mathbf{E}[X] \leqslant \frac{1}{6}(m+2)(n+2)$.

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Powodzenia.