Kolokwium II

Zadanie 1. Urna zawiera 50 kul białych oraz 450 czarnych. Losujemy ze zwracaniem 20 kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie 3 białe kule?

(i) (`0.75 pkt`) Wyznacz dokładny wynik.
(ii) (`0.75 pkt`) Oszacuj to prawdopodobieństwo za pomocą aproksymacji Poissona.

Zadanie 2. Bajtek napisał swoją pierwszą w życiu funkcję hashującą. Jak można się domyślać nie jest ona zbyt skomplikowana. W istocie jej działanie polega na tym, że mapuje słowo na jego dwie ostatnie litery. Zakładając, że funkcja będzie aplikowana tylko do słów składających się z małych liter afabetu angielskiego (jest ich 26), ile słów należy dodać do słownika za pomocą tej funkcji, aby prawdopodobieństwo wystąpienia kolizji wyniosło co najmniej 1/2?

(i) (`0.75 pkt`) Podaj dokładny wynik.
(ii) (`0.75 pkt`) Oszacuj wymaganą liczbę słów za pomocą aproksymacji Poissona.

Zadanie 3 (`2 pkt`)**.** Dwójka znajomych dojeżdza do pracy korzystając z tej samej stacji metra. Każdy z nich niezależnie przybywa na stację o godzinie będącej zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $7:00 - 7:20$ i czeka na kompana nie dłużej niż 5 minut. Pociągi metra odjeżdzają co 3 minuty, począwszy od pełnej godziny tj. $7:00$, $7:03$, $7:06$ itd. Jeśli wybija godzina odjazdu pociągu, drugiego ze znajomych jeszcze nie ma oraz czekanie kolejnych 3 minut na następny pociag spowodowałoby, że sumaryczny czas oczekiwania pierwszego z nich przekroczyłby 5 minut, to nie czeka on dłużej i odjeżdza tym pociągiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znajomi pojadą razem?

Zadanie 4. Funkcja

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{gdy } x \in [0,1]\,, y \in [0, \sqrt{x}]\,, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

jest gęstością wektora losowego (X, Y). Wyznacz:

(i) (`1.5 pkt`) stałą c oraz łączną dystrybuantę $F_{X,Y}$ na całym $\mathbb{R}^2$,
(ii) (`0.75 pkt`) rozkłady brzegowe f_X oraz f_Y na całym $\mathbb{R}$,
(iii) (`0.75 pkt`) wartości oczekiwane $\mathbf{E}[X]$ oraz $\mathbf{E}[Y]$,
(iv) (`1 pkt`) funkcję generującą momenty zmiennej X,
(v) (`0.5 pkt`) czy zmienne X oraz Y są niezależne?

Zadanie 5. Zmienne losowe X oraz Y pochodzą ze standardowego rozkładu normalnego. Dla zmiennej $V = \frac{X+Y}{X-Y}$ wyznacz:

(i) (`2 pkt`) gęstość,
(ii) (`1 pkt`) dystrybuantę,
(iii) (`1 pkt`) wartość oczekiwaną.
(iv) (`0.5 pkt`) Uzasadnij, że zmienna $V' = \frac{X-Y}{X+Y}$ ma taki sam rozkład jak zmienna V.

Zadanie 6. Z sześcianu o boku długości 1 wylosowano w sposób jednostajny punkt $P = (X, Y, Z)$. Punkt P wraz z sześcioma ścianami bocznymi tworzy sześć czworościanów. Wyznacz:

(i) (`2 pkt`) oczekiwaną objętość największego z tak powstałych czworościanów,
(ii) (`2 pkt`) oczekiwany stosunek objętości najmniejszego do największego z czworościanów.

Zadanie 7. Rozpad promieniotwórczy typu β^- dla izotopu węgla ^{14}C dany jest reakcją $^{14}_{6}C \rightarrow^{14}_{7} N + e^- + \bar{v}_e$ i w krótkim przedziale czasu może być skutecznie opisywany procesem Poissona. Innymi słowy, odstępy czasowe pomiędzy detekcją kolejnych wyemitowanych elektronów są opisywane niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Niech X_n będzie zmienną losową określającą czas detekcji n-tego elektronu. Dla zmiennej X_n wyznacz:

(i) (`2 pkt`) gęstość,
(ii) (`1 pkt`) wartość oczekiwaną,
(iii) (`1 pkt`) nierówność Chernoffa postaci $\mathbf{P}(X_n \geqslant a) \leqslant f(n, \lambda, a)$ (warto podstawić $t = \lambda - \frac{n}{a}$).

Zadanie 8 (`2.5 pkt`)**.** W Stochastolandii zapanowała moda na zbieranie figurek bohaterów znanej kreskówki. Figurki te można zdobyć w niektórych opakowaniach chipsów, sprzedawanych przez lokalny sklep. Stochastolandię zamieszkuje N mieszkańców, każdy z nich niezależnie od pozostałych uda sie do sklepu z prawdopodobieństwem p oraz kupi X_i paczek chipsów, gdzie X_i jest zmienną losową z rozkładu Poissona z parametrem λ. Oszacuj jak duży zapas chipsów musi zgromadzić sprzedawca, aby z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - \epsilon$ paczek nie zabrakło. Wynik wyraź jako funkcję $f(N, p, \lambda, \epsilon)$ (funkcja f powinna zależeć od Φ^{-1}).

Zadanie 9 (`3 pkt`)**.** Ola, przygotowując się do wyjścia, sięgnęła po pudełko zawierające jej ulubione, jednakowo długie, gumki do włosów. Zrobiła to jednak na tyle pośpiesznie, że n spośród nich spadło na podłogę. Podłoga w pokoju Oli jest bardzo regularna i składa się z jednakowo szerokich desek położonych równolegle do siebie. Zakładając, że obwód gumki jest mniejszy niż szerokość deski, wyznacz oczekiwaną liczbę przecięć gumek z liniami wyznaczonymi przez łączenia desek.

Zadanie 10 (`3 pkt`)**.** Rozważ nastepujący algorytm generowania etykietowanych grafów planarnych. Dany jest zbiór n rozróżnialnych wierzchołków $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Jako graf początkowy G_0 ustal graf określony na zbiorze wierzchołków V oraz pustym zbiorze krawędzi $E_0 = \emptyset$. Graf G_{k+1} budowany jest na bazie grafu $G_k = G(V, E_k)$ w następujący sposób. Wylosuj w sposób jednostajny parę indeksów $i < j$:

(i) jeśli $e = (v_i, v_j) \in E_k$, to usuń tę krawędź tj. $G_{k+1} = G(V, E \setminus \{e\})$
(ii) jeśli $e = (v_i, v_j) \notin E_k$ i dodanie krawędzi nie psuje planarności, to dodaj tę krawędź tj. $G_{k+1} = G(V, E \cup \{e\})$
(iii) jeśli $e = (v_i, v_j) \notin E_k$, ale dodanie krawędzi psuje planarność, to nic nie rób tj. $G_{k+1} = G_k$

Wykaż, że asymptotycznie (dla $k \to \infty$) ten algorytm generuje etykietowany graf planarny z rozkładem jednostajnym na wszystkich takich n-wierzchołkowych grafach (każdy graf jest osiągalny oraz prawdopodobieństwo dla dwóch różnych jest takie samo).

Zadanie 11. Firma Włóknix zajmująca się produkcją tekstyliów jest w posiadaniu dwóch maszyn tkackich. Czas bezawaryjnej pracy pierwszej z tych maszyn jest zmienną losową z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda_1 = 0.1$. Analogicznie czas pracy drugiej maszyny opisywany jest zmienną z parametrem $\lambda_2 = 0.2$. W celach serwisowania maszyn, firma zatrudnia jeden zespół techników, który naprawia maszynę numer 1 w czasie będącym zmienną losową z rozkładu wykładniczego z parametrem $\mu_1 = 0.9$, zaś maszynę numer 2 z parametrem $\mu_2 = 0.8$. Zespół jest tylko jeden i jest niepodzielny, tak więc w sytuacji gdy obie maszyny są niesprawne jednocześnie, zespół najpierw zajmie się naprawą maszyny, która uległa awarii jako pierwsza, a potem przejdzie do drugiej.

(i) (`0.5 pkt`) Uzasadnij, że cykl życia firmy Włóknix może być opisywany odpowiednim Procesem Markova.
(ii) (`0.5 pkt`) Wyznacz graf stanów Łańcucha Markova stowarzyszonego z tym procesem.
(iii) (`0.5 pkt`) Wyznacz wektor parametrów $\theta_1, \ldots, \theta_n$ tego procesu.
(iv) (`1 pkt`) Wyznacz rozkład stacjonarny Łańcucha Markova.
(v) (`1 pkt`) Wyznacz rozkład stacjonarny Procesu Markova.
(vi) (`0.5 pkt`) Zakładając, że średni dochód generowany przez maszyny to odpowiednio \$60 i \$80 na godzinę, zaś ekipa techników kosztuje \$30 za godzinę pracy, wyznacz średni zysk netto.
(vii) (`0.25 pkt`) Asymptotycznie przez jaką frakcję czasu firma ma do czynienia z przestojem na produkcji (obie maszyny jednocześnie są niesprawne)?
(viii) (`0.25 pkt`) Asymptotycznie przez jaką frakcję czasu zespół techników ma coś do roboty (któraś z maszyn jest niesprawna)?

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Powodzenia.