Kolokwium I

Zadanie 1 (`2 pkt`). Rzucamy kostką sześciościenną dopóki nie wypadną wszystkie ściany.

(i) Jaka jest oczekiwana liczba rzutów?
(ii) Jaka jest oczekiwana liczba wyrzuceń jedynki?

Zadanie 2 (`3 pkt`). W urnie znajduje się b białych kul i c czarnych kul. Wyciągamy kolejno wszystkie kule. Wyciągnięta kula daje *zmianę*, jeśli jej kolor jest różny od koloru kuli wyciągniętej bezpośrednio przed nią. Wyciągnięta biała kula daje *dobrą zmianę*, jeśli bezpośrednio przed nią została wyciagnięta czarna kula.

(i) Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja liczby zmian?
(ii) Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja liczby dobrych zmian?

Zadanie 3 (`3 pkt`). Średnio na jednej stronie *Wielkiej Encyklopedii* znajduje się półtora błędu. Stron jest wiele, słów na stronie jest wiele, a więc szansa na błąd w ustalonym słowie jest mała.

(i) Oszacuj szansę, że na losowej stronie nie ma błędu oraz szansę, że na losowej stronie są co najmniej 2 błędy.
(ii) Wykorzystaj nierówność Chernoffa i oszacuj prawdopodobieństwo, że na n (dla dużego n) pierwszych stronach jest co najmniej $2n$ błędów.

Zadanie 4 (`2 pkt`). Rzucamy n razy kostką. Podaj jak najmniejszą asymptotycznie funkcję $f(n)$ taką, że

$$\mathrm{P}\left(\text{wypadło co najmniej } \frac{n}{6} + f(n) \text{ szóstek}\right) < c/n,$$

dla pewnej stałej c.

Zadanie 5 (`3 pkt`). W talii $2n$ kart mamy n czerwonych i n czarnych kart. Talia jest potasowana i kolejno wszystkie karty są wykładane na stół. Dla każdej wyciągniętej czerwonej karty, jeśli po jej wyciągnięciu na stole jest więcej czerwonych niż czarnych kart to zdobywamy jeden punkt. Jaka jest oczekiwana liczba zdobytych punktów?

Zadanie 6 (`2 pkt`). Niech x będzie losowo wybraną liczbą ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$, a y losowo wybraną liczbą ze zbioru $\{1, \ldots, x\}$. Jaka jest wartość oczekiwana y? Sprawdź poprawność wzoru wyliczając wartość numeryczną dla $n = 2$ i $n = 3$.

Zadanie 7 (`3 pkt`). W samolocie leci $N = n_1+n_2+n_3+n_4+1$ rodzin, gdzie n_i rodzin ma i sztuk bagażu, dla $1 \leqslant i \leqslant 4$, a nasza rodzina jest jedyną z pięcioma bagażami. Przyjmując, że kolejność wydawania walizek jest losowa, jaka jest oczekiwana liczba rodzin, które będą czekać dłużej od naszej na swoje bagaże?

Zadanie 8 (`3 pkt`). Przyjmijmy, że funkcja haszująca została wybrana losowo i jednostajnie spośród wszystkich funkji ze zbioru $\{1, \ldots, m\}$ do zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Obiekty są zapisywane kolejno do tablicy w komórce wskazanej przez wartość funkcji haszującej. Jeśli przy próbie zapisu okazuje się, że komórka jest zajęta to mówimy, że następuje *kolizja* (i powiedzmy, że stary element tablicy jest nadpisywany nowym). Jaka jest oczekiwana liczba kolizji?

Zadanie 9 (`3 pkt`)**.** Według spisu ludności z 2011 roku Irlandię zamieszkuje około 4.5 miliona osób w tym 122 tysiące Polaków. Rozważ losową próbkę 100 mieszkańców Irlandii.

(i) Jaki rozkład ma liczba Polaków w próbce?
(ii) Policz wartość oczekiwaną i wariancję liczby Polaków w próbce.
(iii) Oszacuj prawdopodobieństwo, że w próbce jest co najmniej dwu Polaków.

Zadanie 10 (`3 pkt`)**.** Rzucamy 101 razy monetą. Jaka jest oczekiwana liczba orłów przy założeniu, że wypadło więcej reszek niż orłów?

Zadanie 11 (`3 pkt`)**.** Rozważ spacer losowy po liczbach całkowitych. Rozpoczynasz w 1 i w każdym kroku masz równą szansę zrobić krok w lewo (-1) lub krok w prawo $(+1)$. Jaka jest oczekiwana liczba odwiedzeń wartości 10 przez pierwszym odwiedzeniem wartości 0?

Zadanie 12 (`3 pkt`)**.** Kura znosi N jajek, gdzie N jest zmienną o rozkładzie Poissona z parametrem λ. Z każdego jajka wykluwa się pisklę z prawdopodobieństwem p $(0 < p < 1)$ niezależnie od innych jajek. Niech K będzie liczbą wyklutych piskląt. Znajdź $\mathrm{E}(K|N)$, $\mathrm{E}(K)$ oraz $\mathrm{E}(N|K)$.

Zadanie 13 (bonusowe; `+1 pkt`; rozwiązanie można przysłać do niedzieli do godz. 23:59 z oświadczeniem o samodzielności wykonania zadania)**.** Rozważ dwie niezależne (dyskretne) zmienne losowe X i Y o tym samym rozkładzie. Wykaż, że

$$\mathrm{P}(|X-Y| \leqslant 2) \leqslant 3\,\mathrm{P}(|X-Y| \leqslant 1).$$

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Powodzenia.