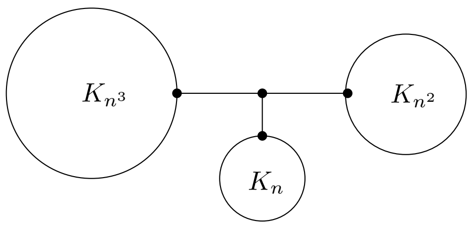
Kolokwium II

Zadanie 1 (`3 pkt`)**.** Udowodnij, że jeśli jeden ze stanów w danej klasie relacji skomunikowania łańcucha Markowa jest stanem rekurencyjnym, to wszystkie stany w tej klasie są rekurencyjnie. Udowodnij analogiczny rezultat dla stanów chwilowych. Podaj przykład łańcucha Markowa ze stanem null-rekurencyjnym.

Zadanie 2 (`3 pkt`)**.** Rozważ dowolny spójny graf G i rozważ spacer losowy po zorientowanych krawędziach grafu G. A więc stanami łańcucha są wszystkie pary (u, v) takie, że u i v sąsiadują w G. Będąc w stanie (u, v) łańcuch przechodzi do stanu (v, w) z prawdopodobieństwem $1/d(v)$ (gdzie $d(v)$ jest stopniem v w G). Wyznacz rozkład stacjonarny tego łańcucha.

Zadanie 3 (`3 pkt`)**.** Rozważ graf na $1 + n + n^2 + n^3$ wierzchołkach jak na rysunku. Z którego wierzchołka powinieneś rozpocząć standardowy losowy spacer po grafie aby mieć jak najmniejszy asymptotycznie czas pokrycia? Oblicz właściwy czas pokrycia (wystarczy asymptotycznie względem n).



Zadanie 4 (`3 pkt`)**.** Losujemy (niezależnie i jednostajnie) trzy punkty A, B i C na obwodzie okręgu. Z jakim prawdopodobieństwem kąt ABC jest ostry?

Zadanie 5 (`3 pkt`)**.** Łamiemy kij długości 1 w dwu miejscach. Z jakim prawdopodobieństwem możemy z otrzymanych trzech kawałków zbudować trójkąt jeśli

(i) miejsca łamania wybrane są niezależnie i jednostajnie po całym kiju?
(ii) pierwsze łamanie jest wybrane jednostajnie po całym kiju, a drugie łamanie jest wybrane jednostajnie po dłuższym z dwu otrzymanych kawałków?

Zadanie 6 (`3 pkt`)**.** Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej o k-tej największej wartości spośród wylosowanych.

Zadanie 7 (`3 pkt`)**.** Rozważ zmienną X o rozkładzie wykładniczym z parametrem 3. Jaki rozkład ma zmienna $\lceil X \rceil$? Czy ten rozkład coś Ci przypomina?

Zadanie 8 (`3 pkt`)**.** Niech X będzie zmienną o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Niech Y będzie zmienną o rozkładzie jednostajnym na $[0, X]$ i niech Z będzie zmienną o rozkładzie jednostajnym na $[X, 1]$. Oblicz prawdopodobieństwo, że $Y + Z > 1$.

Zadanie 9 (`3 pkt`). Pan Buffon rzuca igłą długości 2 na podłogę przeciętą równoległymi liniami z odstepem 1. Z jakim prawdopodobieństwem igła przetnie którąś z linii?

Zadanie 10 (`3 pkt`). Rozważ fabrykę w której pracują dwie maszyny podłączone sekwencyjnie, a więc pierwsza przerabia swoje wejście wypluwa półprodukt do drugiej która po przetworzeniu go wypluwa gotowy produkt. Maszyny działają w sposób ciągły i bez wpływu zewnętrznych czynników okresy bezawaryjnej pracy są niezależnymi zmiennymi losowwymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami $\lambda_1 = 0.1$ i $\lambda_2 = 0.2$, odpowiednio. W celach serwisowania maszyn, firma zatrudnia jeden zespół techników. Zespół (jeśli nie pracuje) ma czas dotarcia do zepsutej maszyny $\mu = 1$. W okresie w którym maszyna 1 jest zepsuta ale jeszcze nie naprawiana, a maszyna 2 wciąż pracuje maszyna 2 ma większe szanse na awarię i jej czas bezawaryjnej pracy modelowany jest zmienną o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda_3 = 0.3$. W momencie podjęcia naprawy, system jest wyłączany (nic się wtedy nie może zepsuć) i włączany jest ponownie gdy obie maszyny są sprawne.

(i) Uzasadnij, że cykl pracy w opisanej fabryce można modelować procesem Markowa. Wyznacz graf stanów stowarzyszonego łańcucha Markowa. Wyznacz wektor parametrów (θ_i) takich, że proces znajduje się w i-tym stanie łańucha czas będący zmienną wykładniczą o parametrze θ_i.
(ii) Wyznacz rozkład stacjonarny tego łańcucha i procesu Markowa.
(iii) Jaką frakcję czasu (asymptotycznie, czyli w dalekiej przyszłości) obie maszyny są sprawne?

Zadanie 11 (`3 pkt`). Rozważ 64 niezależne zmienne losowe z rozkładem wykładniczym o parametrze 1. Z jakim prawdopodobieństwem ich suma jest mniejsza od 60? Oszacuj odpowiedź przy pomocy CTG.

Powodzenia.