Probabil Rachunek prawdopodobieństwa Kraków
Semestr zimowy 2019/2020 4 grudnia 2019

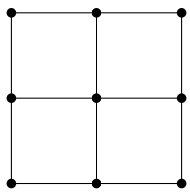
THEORETICAL COMPUTER SCIENCE
Jagiellonian University

Kolokwium I

Zadanie 1 (`2 pkt`)**.** Jasiu lubi grać w gry. Pewnego dnia nudził się tak bardzo, że sam skonstruował sobie planszę i ułożył zasady nowej gry. Plansza złożona jest z $n+1$ pól poetykietowanych liczbami ze zbioru $\{0,\ldots,n\}$ dla pewnego ustalonego $n \geqslant 5$. Pionek startuje z pola 0. W każdej rundzie rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł to pionek przesuwa się o 2 pola do przodu, zaś jeśli wypadnie reszka to o 1 pole do przodu. Dodatkowo Jasiu przed rozpoczęciem gry zaznacza pewien podzbiór pól $X \subset \{1,\ldots,n-1\}$ jako niebezpieczny dla pionka, to jest, kiedykolwiek pionek tam stanie to natychmiast wycofywany jest do pola 0. Pionek wygrywa jeśli w końcu dotrze do pola n lub je przeskoczy. Dla ustalonego zbioru X niech p_X będzie prawdopodobieństwem tego, że jak Jasiu będzie grać do upadłego na planszy z X jako niebiezpiecznymi polami to z prawdopodobieństwem p_X w końcu wygra.

Jakie są możliwe wartości p_X (gdzie X przebiega po podzbiorach $\{1,\ldots,n-1\}$)?

Zadanie 2 (`3 pkt`)**.** Robocik chodzi po labiryncie (grafie) naszkicowanym poniżej. Podróż rozpoczyna w lewym dolnym wierzchołku a kończy w prawym górnym wierzchołku. W każdym kroku robocik porusza się z aktualnego wierzchołka do jednego z wierzchołków sąsiadujących. Dla dowolnego aktualnego wierzchołka robocik wybiera kierunek losowo i jednostajnie spośród wszystkich krawędzi poza tą którą przyszedł do tego wierzchołka. (W pierwszym kroku nie ma tej którą przyszedł.) Oblicz oczekiwaną liczbę kroków od startu do mety.



Zadanie 3 (`3 pkt`)**.** Po lesie hasa stado A wilków. Ekolodzy w celach badawczych założyli bransoletki na B z nich. Po kilku miesiącach złapali losową próbkę C wilków.

(i) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie i spośród złapanych wilków ma bransoletkę?
(ii) Jaka jest oczekiwana liczba złapanych wilków z bransoletką?
(iii) Jaka jest wariancja liczby złapanych wilków z bransoletką?

Zadanie 4 (`2 pkt`)**.** Liczba jajek pewnych owadów złożonych na liściu drzewa jest zmienną o rozkładzie Poissona z parametrem 10. Badacze przeprowadzają różne statystyki na tych liściach gdzie jest chociaż jedno jajko. Jaka jest oczekiwana liczba jajek na badanym liściu?

Zadanie 5 (`2 pkt`)**.** Oszacuj $P(X \geqslant 10)$ gdzie X zmienną o rozkładzie Poissona z parametrem 1. Przeprowadź trzy szacowania używając odpowiednio nierówności Markowa, Czebyszewa i Chernoffa.

Zadanie 6 (`2 pkt`). Sto ludzi wchodzi do samolotu który ma sto foteli dla pasażerów. Pierwsza osoba wsiadając zgubiła swój bilet i usiadła na losowym fotelu. Kolejne osoby siadały na swoim miejscu o ile to miejsce było wolne, jeśli było zajęte to wybierały losowe wolne miejsce. Z jakim prawdopodobieństwem ostatnia osoba usiadła na swoim miejscu?

Zadanie 7 (`2 pkt`). W urnie znajdują się dwie kule: czarna i biała. Wyciągamy z urny losową kulę. Jeśli wyciągnęliśmy czarną to wrzucamy ją z powrotem wraz z jeszcze jedną nową czarną kulą. I powtarzamy. Jeśli wyciągnęliśmy białą to kończymy.

(i) Z jakim prawdopodobieństwem proces się skończy?
(ii) Jaka jest oczekiwana długość procesu?

Zadanie 8 (`3 pkt`). Rzucamy n razy monetą na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ Podaj jak najmniejszą asymptotycznie funkcję $f(n)$ taką, że

$$P\left(\text{wypadło co najmniej } \frac{2}{3}n + f(n) \text{ orłów}\right) < c/n,$$

dla pewnej stałej c.

Zadanie 9 (`3 pkt`). Rozważ spacer losowy po kracie liczb całkowitych. Rozpoczynasz w punkcie $(10, 10)$. W każdym kroku poruszasz o jeden czterech możliwych wektorów: $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ lub $(1, 1)$. Każda z czterech opcji jest równie prawdopodobna. Z jakim prawdopodobieństwem spacer uderzy w linię $y = -x$? Jaka jest oczekiwana liczba kroków do pierwszego uderzenia w tę linię?

Zadanie 10 (`2 pkt`). Rzucamy kostką do upadłego. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję

(i) liczby rzutów do wyrzucenia po raz szósty szóstki,
(ii) liczby rzutów do wyrzucenia sześciu szóstek z rzędu.

Zadanie 11 (`3 pkt`). Rzucamy symetryczną monetą 100 razy i zapisujemy wyniki w ciągu. Jaka jest oczekiwana liczba podciągów (spójnych) postaci ORO (orzeł-reszka-orzeł)? Jaka jest wariancja tej liczby?

Zadanie 12 (`3 pkt`). Dana jest moneta asymetryczna z nieznanym Ci prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$ wyrzucenia orła. Jak wiele rzutów musisz wykonać, aby z prawdopodobieństwem co najmniej $0,9$ poznać wartość p z dokładnością do $0,1$?

Zadanie 13 (`3 pkt`). Sala kinowa ma 100 miejsc: cztery rzędy po 5 miejsc, cztery rzędy po 10 miejsc i dwa rzędy po 20 miejsc. Do kina przychodzi 50 zakochanych par. Wszystkie osoby zasiadły na losowych miejscach. Jaka jest oczekiwana liczba par siedzących koło siebie? Jaka jest oczekiwana liczba dziewczyn siedzących pomiędzy dwoma chłopcami?

Powodzenia.