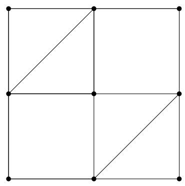
Kolokwium II

Zadanie 1 (2 pkt). Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą łańcuchami Markowa.

(i) Czy $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zawsze będzie łańcuchem Markowa?
(ii) Czy dla ustalonego $m \geqslant 0$, ciąg $(X_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ zawsze będzie łańcuchem Markowa?
(iii) Czy ciąg $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ zawsze będzie łańcuchem Markowa?
(iv) Czy ciąg par $((X_n, X_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ zawsze będzie łańcuchem Markowa?

Zadanie 2 (3 pkt). Rozważ spacer losowy po grafie przedstawionym na rysunku. Spacer startuje z wierzchołka A. Rozważ stowarzyszony z nim łańcuch Markowa $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie stanami są wierzchołki grafu oraz $X_0 = A$.

(i) Wyznacz $\lim_{n\to\infty} P(X_n = A)$ oraz $\lim_{n\to\infty} P(X_n = B)$.
(ii) Jaka jest oczekiwana liczba odwiedzeń wierzchołka B przed pierwszym powrotem do A?



Zadanie 3 (4 pkt). Rozważ proces Poissona z parametrem 1000. Zakładając, że w pierwszych 2020 jednostkach czasu pojawiło się tylko jedno zdarzenie procesu:

(i) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnych 2020 jednostkach czasu pojawi się co najmniej jedno zdarzenie?
(ii) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszych 1010 jednostkach czasu pojawi się jedno zdarzenie?

Zadanie 4 (3 pkt). Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ i μ, odpowiednio.

(i) Jakie jest prawdopodobieństwo, że $X < Y$?
(ii) Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$, i $W = V - U$. Czy U i W są niezależne?

Zadanie 5 (3 pkt). Niech $X_1, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Rozważ zmienne $Y_1 = a_1X_1 + \cdots + a_{10}X_{10}$ oraz $Y_2 = b_1X_1 + \cdots + b_{10}X_{10}$, dla ustalonych stałych $a_1, \ldots, a_{10}, b_1, \ldots, b_{10}$. Ile wynosi kowariancja Y_1 i Y_2, czyli $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{E}\left[(Y_1 - \mathrm{E}(Y_1))(Y_2 - \mathrm{E}(Y_2))\right]$?

Zadanie 6 (3 pkt). Losujemy dwie liczby niezależnie i jednostajnie z przedziału $[-2020, 2020]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość bezwględna mniejszej jest większa od dwukrotności wartości bezwględnej większej?

Zadanie 7 (`3 pkt`)**.** Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będzie statystyką tych zmiennych. (Zatem istnieje bijekcja f na zbiorze $\{1, \ldots, n\}$ taka, że $Y_i = X_{f(i)}$ oraz $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \cdots \leqslant Y_n$.)

(i) Jaka jest gęstość zmiennej $Y_{k+1} - Y_k$ dla ustalonego $k \in \{1, \ldots, n-1\}$?

(ii) Jaka jest wspólna gęstość zmiennych $Y_{k+1} - Y_k$ oraz $Y_{j+1} - Y_j$ dla $j \neq k$, $j, k \in \{1, \ldots, n-1\}$?

Zadanie 8 (`3 pkt`)**.** Rzucamy monetą o promieniu 1 na podłogę. Podłoga pokafelkowana jest płytkami kwadratowymi o boku d. Ile powinno wynosić d aby szansa, że moneta przykryje przecięcie dwu linii (styk czterech płytek) była 50%?

Zadanie 9 (`2 pkt`)**.** Dwa punkty A i B wybrane są niezależnie i jednostajnie na obwodzie półkoła o promieniu 1 i o środku w punkcie M. Jakie jest oczekiwane pole trójkąta ABM? Uwaga: obwód półkoła wynosi $2 + \pi$.

Zadanie 10 (`3 pkt`)**.** Losujemy n punktów niezależnie i jednostajnie na okręgu. Jakie jest prawdopoodbieństwo, że wszystkie punkty leżą na jednym półokręgu?

Zadanie 11 (`3 pkt`)**.** Jak wygenerować liczbę ze zbioru $\{0, \ldots, n-1\}$ w sposób jednostajny używając skrzywionej monety (orzeł wypada z prawdopodobieństwem $2/3$) przy jak najmniejszej oczekiwanej liczbie rzutów?

Zadanie 12 (`2 pkt`)**.** Niech $\mathcal{F}$ będzie (skończoną) rodziną (skończonych) ciągów binarnych takich, że X nie jest prefiksem Y dla dowolnych dwu różnych $X, Y \in \mathcal{F}$. (Zatem rodzina $\mathcal{F}$ jest *prefiksowa*.) Wykaż, że

$$\sum_{X \in \mathcal{F}} \frac{1}{2^{|X|}} \leqslant 1.$$

Zadanie 13 (bonusowe; `5 pkt`; można wysyłać emailem do niedzieli; tylko dla osób, które zaliczą bez tego zadania)**.** Niech $\mathcal{F}$ będzie (skończoną) rodziną (skończonych) ciągów binarnych takich, że każdy ciąg binarny można otrzymać na co najwyżej jeden sposób konkatenując ciągi z $\mathcal{F}$. Wykaż, że

$$\sum_{X \in \mathcal{F}} \frac{1}{2^{|X|}} \leqslant 1.$$

Powodzenia.