Kolokwium 1/3

Zadanie 1 (`2 pkt`)**.** Cztery cyfry 1, 2, 3 i 4 ustawione są losowo w dwie liczby dwucyfrowe: AB i CD. Jaka jest oczekiwana wartość iloczynu $AB \cdot CD$?

Zadanie 2 (`2 pkt`)**.** W urnie mamy 4 kule o 4 różnych kolorach. Losujemy 4 razy kule z urny ze zwracaniem. Jaka jest oczekiwana liczba kolorów wylosowanych kul?

Zadanie 3 (`2 pkt`)**.** Dana jest moneta symetryczna. Zaproponuj algorytm, który będzie symulował zachowanie monety asymetrycznej o ustalonym wymiernym $p \in (0,1)$. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów (symetryczną monetą) przed zwróceniem wyniku (symulowanej asymetrycznej monety)? Im mniejsza oczekiwana liczba rzutów tym lepiej.

Zadanie 4 (`2 pkt`)**.** Niech π będzie losową permutacją zbioru $\{1,\ldots,n\}$. Wyznacz

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} |\pi(i) - i|\right].$$

Zadanie 5 (`2 pkt`)**.** W urnie znajduje się b białych kul i c czarnych kul. Wyciągamy kolejno wszystkie kule. Wyciągnięta kula daje *zmianę*, jeśli jej kolor jest różny od koloru kuli wyciągniętej bezpośrednio przed nią. Wyciągnięta biała kula daje *dobrą zmianę*, jeśli bezpośrednio przed nią została wyciagnięta czarna kula.

(i) Jaka jest oczekiwana liczba i wariancja zmian?
(ii) Jaka jest oczekiwana liczba i wariancja dobrych zmian?

Zadanie 6 (`2 pkt`)**.** Zatrudniamy pracownika sposród n kandydatów wg. natępującej procedury. Pierwszego w kolejce zatrudniamy. Każdego następnego zatrudniamy jeśli jest lepszy od aktualnie zatrudnionego (jednocześnie zwalniając poprzednika). Przyjmujemy, że nie ma dwóch kandydatów o jednakowych kwalifikacjach (zawsze któryś z dwójki jest lepszy). Wyznacz wartość oczekiwaną liczby zatrudnień w tym procesie.

Zadanie 7 (`3 pkt`)**.** W pojemniku znajduje się N cząsteczek białka w tym Z cząsteczek jest zmutowanych. Wybieramy losowo bez zwracania n cząsteczek spośród wszystkich w pojemniku.

(i) Jaki rozkład ma zmienna losowa będąca liczbą zmutowanych cząsteczek w pojemniku?
(ii) Policz wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

Zadanie 8 (`2 pkt`)**.** Rzucamy 101 razy monetą. Jaka jest oczekiwana liczba orłów przy założeniu, że wypadło więcej reszek niż orłów?

Zadanie 9 (`3 pkt`)**.** Rzucamy monetą n razy. Mówimy, że spójny i niepusty podciąg rzutów jest *monotoniczny* jeśli jest postaci O^iR^j dla pewnych $i,j \geqslant 0$. Policz liczbę oczekiwaną podciągów monotonicznych.

Zadanie 10 (`2 pkt`)**.** Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie ciągiem n niezależnych zmiennych o rozkładzie geometrycznym, każda z wartością oczekiwaną 2. Niech $X = \sum X_i$ i niech $\delta > 0$. Wyprowadź nierówność Chernoffa ograniczającą $P(X \geqslant (1+\delta) \cdot 2n)$.

Zadanie 11 (`3 pkt`)**.** Rzucamy n razy sprawiedliwą sześciościenną kostką. Podaj jak najmniejszą asymptotycznie funkcję $g(n)$ taką, że

$$P\left(\text{wypadło w sumie co najmniej } \frac{7}{2} \cdot n + g(n) \text{ oczek}\right) \leqslant \frac{c}{n},$$

dla pewnej stałej c.

Zadanie 12 (bonusowe; `+1 pkt`; rozwiązanie można przysłać do niedzieli 5.XII do godz. 23:59 z oświadczeniem o samodzielności wykonania zadania)**.** Rozważ dwie niezależne (dyskretne) zmienne losowe X i Y o tym samym rozkładzie. Wykaż, że

$$\mathrm{P}(|X - Y| \leqslant 2) \leqslant 3\,\mathrm{P}(|X - Y| \leqslant 1).$$

Powodzenia.