Kolokwium 2/3 (poprawione)

Zadanie 1 (`4 pkt`). Liczba nowych jajek dziennie w kurniku ma rozkład Poissona z parametrem 5. Przyjmijmy, że z każdego jajka wykluwa się kurczak lub kura oba z prawd. 1/2 Jaki rozkład ma liczba nowych kurczaków dziennie w kurniku? Jaki rozkład ma liczba nowych kurczaków jeśli założymy, że tego dnia nie wykluła się żadna nowa kura?

Zadanie 2 (`4 pkt`). Niech X, Y i Z będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie Poissona. Niech $E(X) = 1$, $E(Y) = 2$ i $E(Z) = 3$. Oblicz $P(X + Y + Z \leqslant 2)$.

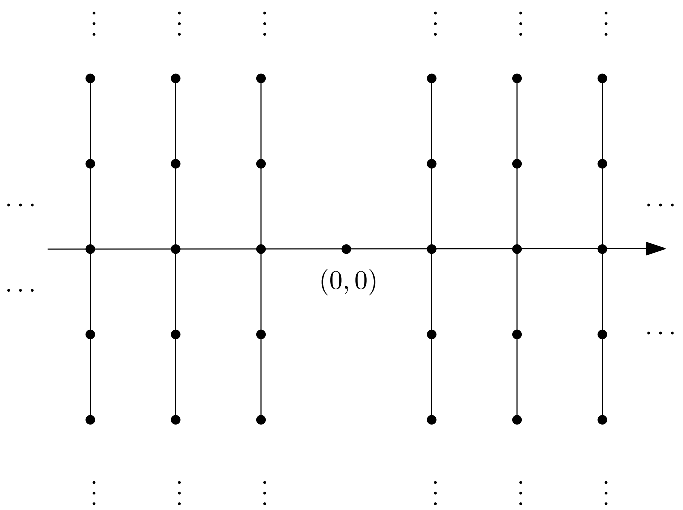
Zadanie 3 (`4 pkt`). Rozważ łańcuch Markowa przesuwający szachowego króla po szachownicy (8×8). Dla przypomnienia, król może przesunąć się na dowolne pole sąsiadujące z aktualnym (w pionie, poziomie lub po skosie). Zatem król ma maksymalnie 8 różnych możliwości w każdym ruchu. Przyjmijmy, że król rozpoczyna na polu $E1$. Niech x będzie dowolnym polem na szachownicy. Definiujemy p_t^x jako prawdopodobieństwo, że po t ruchach król będzie stał na polu x. Oblicz $\lim\limits_{t\to\infty} p_t^x$, dla każdego pola x.

Zadanie 4 (`4 pkt`). Rozważ macierz $Q = [q_{ij}]$ $(n \times n)$ z wszystkimi wartościami dodatnimi, sumą wartości w każdym wierszu równą 1, oraz sumą wartości w każdej kolumnie równą 1. Rozważ łańcuch Markowa na n stanach zadany przez macierz Q. Czy ten łańcuch ma zawsze rozkład stacjonarny? Jeśli nie, to proszę podać przykład. Jeśli tak, to proszę wyznaczyć rozkład stacjonarny.

Zadanie 5 (`4`$\frac{1}{2}$ `pkt`). Rozważ nieredukowalny i skończony łańcuch Markowa $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$. Dla dowolnego stanu x, definiujemy $T_x = \min\{n \geqslant 1 \mid X_n = x\}$ przy czym jeśli min brane jest ze zbioru pustego to definiujemy $T_x = \infty$. Dwa stany x i y w łańcuchu są *symetryczne* jeśli $P(T_y < T_x \mid X_0 = x) = P(T_x < T_y \mid X_0 = y)$. Rozważ dwa symetryczne stany x i y. Przy założeniu, że $X_0 = x$, policz oczekiwaną liczbę odwiedzeń y przed pierwszym powrotem do x.

Zadanie 6 (`4`$\frac{1}{2}$ `pkt`). Rozważ spacer losowy po narysowanym na drugiej stronie grafie. Wierzchołkami grafu są elementy $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Dwa wierzchołki (x_1, y_1) i (x_2, y_2) sąsiadują w grafie jeśli ($x_1 = x_2$ i $|y_1 - y_2| = 1$) lub ($y_1 = y_2 = 0$ i $|x_1 - x_2| = 1$). Które stany w tym łańcuchu są rekurencyjne, a które są pozytywnie rekurencyjne?

Powodzenia.


(0, 0)