Kolokwium 3/3

Zadanie 1 (4 pkt). Łamiesz kij długości jednego metra w dwu losowych miejscach (wybranych niezależnie i jednostajnie). Otrzymujesz w ten sposób 3 kawałki kija. Podaj oczekiwaną długość najkrótszego kawałka, średniego kawałka, oraz najdłuższego kawałka.

Zadanie 2 (3 pkt). Losujemy dwie liczby X i Y jednostajnie i niezależnie z przedziału $[0, 10]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że $|X - Y| < 5$?

Zadanie 3 (3 pkt). Wybierz punkt X w sposób losowy i jednostajny z okręgu O o średnicy 1 i o środku w punkcie $(0, 10)$. Rozważ średnicę O o końcu w punkcie X. Jaka jest oczekiwana długość projekcji tej średnicy na oś OX?

Zadanie 4 (4 pkt). Niech $\{N(t) \mid t \geqslant 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ. Niech $Y_1, Y_2, \ldots$ będą czasami przyjścia kolejnych zdarzeń (pierwszego, drugiego,...). Oblicz:

(i) $P(N(3) = 5)$
(ii) $P(N(3) - N(1) = 4)$
(iii) $P(N(1) \geqslant 1 \ \cap \ N(3) \leqslant 2)$
(iv) $P(Y_1 > \frac{1}{2})$
(v) $P(Y_1 > \frac{1}{2} \ \cap \ Y_3 \leqslant \frac{3}{2})$
(vi) $P(Y_1 > 1 \ \cap \ Y_2 - Y_1 \leqslant \frac{1}{2})$

Zadanie 5 (3 pkt). Rozważ proces Poissona $\{N(t) \mid t \geqslant 0\}$ z parametrem λ.

(i) Czy dla ustalonego $c > 0$ rodzina $\{c \cdot N(t) \mid t \geqslant 0\}$ jest procesem Poissona?
(ii) Oblicz $P(N(2021) = 31 \mid N(2022) = 31)$.

Zadanie 6 (4 pkt). 2022 cząsteczki elementarne zostały przyśpieszone w akceleratorze. Każda z nich trzyma się swojego kursu przez okres czasu, który jest zmienną o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Przyjmijmy, że czasy i kursy tych cząsteczek są niezależne. Jaki jest oczekiwany czas w którym co najmniej połowa cząsteczek trzyma się swojego kursu?

Zadanie 7 (4 pkt). Do małego kantoru klienci przybywają zgodnie z procesem Poissona w tempie 0.2 klienta na minutę. Średni czas obsługi jednego klienta wynosi 2 minuty. Z racji małego rozmiaru pomieszczenia, w którym znajduje się kantor, co najwyżej dwóch klientów (poza aktualnie obsługiwanym) może znajdować się w kolejce. W sytuacji, gdy kolejka jest pełna, nowoprzybyły klient nie korzysta z tego kantoru, lecz udaje się do innego.

(i) Zamodeluj i opisz ten proces jako Proces Markowa. Wskaż graf stanów i macierz przejścia Łańcucha Markowa.
(ii) Wyznacz rozkład stacjonarny Łańcucha oraz Procesu.
(iii) Asymptotycznie jaką frakcję czasu kantor jest pełny (kolejka jest pełna)?
(iv) Asymptotycznie jaka frakcja klientów nie skorzysta z kantoru ze względu na pełną kolejkę?

(v) W tym momencie w kantorze znajduje się dokładnie jeden klient. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zostanie obsłużony zanim przybędzie kolejny klient?

Zadanie 8 (bonusowe; `+1 pkt`; rozwiązanie można przysłać do niedzieli 30.I do godz. 23:59 z oświadczeniem o samodzielności wykonania zadania)**.** Rzucasz kostką sześcienną o boku długości 1 do góry i zamrażasz czas w losowym momencie. Jakie jest oczekiwane pole projekcji kostki na podłogę?

Powodzenia.