

Kolokwium 1/2

Zadanie 1 (4 pkt). Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną. Rozważ graf losowy G w którym $|V(G)| = n$ i dla dowolnych dwu różnych wierzchołków x i y w G mamy krawędź xy w G z prawdopodobieństwem $1/2$. Jaka jest oczekiwana liczba 5-wierzchołkowych zbiorów niezależnych w G ?

Zadanie 2 (4 pkt). Rzucamy monetą symetryczną 2022 razy i wyniki ustawiamy w ciąg. Jaka jest oczekiwana liczba spójnych podciągów postaci RORR (reszka-orzeł-reszka-reszka)? Jaka jest wariancja tej liczby?

Zadanie 3 (4 pkt). Rozważ losową permutację zbioru n -elementowego. Jaka jest oczekiwana liczba cykli długości 3 w tej permutacji?

Zadanie 4 (4 pkt). Mamy 25 par skarpetek, czyli w sumie 50 skarpetek. Wrzuciliśmy je wszystkie do pralki na intensywne pranie. Pralka zniszyła nam 8 skarpetek. Jaka jest oczekiwana liczba par niezniszczonych skarpetek?

Zadanie 5 (4 pkt). Dana jest liczba naturalna k . Rzucamy monetą do momentu aż wyrzucimy przynajmniej k reszek i przynajmniej k orłów. Niech X będzie liczbą wykonanych rzutów. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X . Oblicz wartość oczekiwaną X .

Zadanie 6 (4 pkt). Przy okrągłym stole stoi 101 talerzy, ponumerowanych $0, 1, \dots, 100$ zgodnie ze wskazówkami zegara. Gorące ciasto zostaje podane na talerzu numer 0 i zaczyna krążyć po stole jak w symetrycznym spacerze losowym ($1/2$ szansy na ruch zgodny jak i przeciwny do wskazówek zegara; ruchy są od siebie niezależne). Dla ustalonego $k \in \{0, \dots, 100\}$, z jakim prawdopodobieństwem ostatnim talerzem które ciasto jeszcze nie odwiedziło jest talerz o numerze k ?

Zadanie 7 (4 pkt). Rozważ następujący spacer losowy po \mathbb{N} . Rozpoczynamy w liczbie 1. W każdym kroku z prawdopodobieństwem $0,49$ przechodzimy do liczby o 1 mniejszej i z prawdopodobieństwem $0,51$ przechodzimy do liczby o 1 większej. Spacer zatrzymuje się po dotarciu do liczby 0. Z jakim prawdopodobieństwem spacer się zatrzyma?

Zadanie 8 (4 pkt). Otrzymujemy w prezencie X kul, gdzie X ma rozkład Poissona z parametrem 2022. Dla każdej kuli rzucamy sześciocienną kostką i jeśli wyrzuciliśmy 1 to malujemy kulę na biało, jeśli wyrzuciliśmy 2 to malujemy kulę na czarno, jeśli zaś wyrzuciliśmy coś innego to wyrzucamy kulę do śmieci.

1. Z jakim prawdopodobieństwem będziemy mieć więcej czarnych kul niż białych?
2. Jaki jest rozkład liczby czarnych kul przy założeniu, że nie uzyskaliśmy żadnej białej kuli?
3. Jaka jest oczekiwana liczba białych kul przy założeniu, że czarnych kul jest dwa razy więcej od białych?

Zadanie 9 (4 pkt). Wrzucamy k kul do n urn. Z jakim prawdopodobieństwem żadne dwie kule nie trafiły do tej samej urny ani do dwu sąsiednich urn?

Zadanie 10 (4 pkt). *Rozwiązanie tego zadania można przysłać emailem do niedzieli (27 listopada, 23:59) wraz z oświadczeniem o samodzielności wykonania rozwiązania.*

Rozważ klasę uczniów w której każdy chłopiec przyjaźni się z co najmniej jedną dziewczyną. Wykaż, że można wybrać podzbiór X uczniów z tej klasy zawierający co najmniej połowę uczniów taki, że każdy chłopiec w X przyjaźni się z nieparzystą liczbą dziewczyn w X .

Powodzenia.