

Kolokwium 2/2

Zadanie 1 (5 pkt). Poruszasz się między domem a biurem. Pewnego razu kupiłeś cztery parasole, które położyłeś w domu przy wejściu. Przyjmijmy następnie, że każdego dnia (zaczynając od Dnia 0) wychodzisz rano z domu do biura i po południu wychodzisz z biura do domu. Przed każdym takim wyjściem: jeśli w danym momencie pada deszcz i jeśli masz jeden z parasoli w swojej lokalizacji, to bierzesz parasol, chronisz się przed deszczem i odkładasz parasol w docelowej lokalizacji.

Założmy, że w każdym momencie prawdopodobieństwo tego, że pada wynosi p . Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, niech X_{2n} będzie zmienną losową określającą liczbę parasoli w domu w Dniu n -tym rano przed Twoim wyjściem i niech X_{2n+1} będzie zmienną losową określającą liczbę parasoli w biurze w Dniu n -tym w czasie Twojej pracy.

1. Czy $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest łańcuchem Markowa?
2. Jeśli odpowiedział-aś/-eś na (i) tak, to czy ten łańcuch ma rozkład stacjonarny? Jeśli tak to oblicz ten rozkład.
3. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech A_n będzie zdarzeniem, że n -tego dnia zmokł-aś/-eś: to jest wychodząc z domu lub później wychodząc z pracy padał deszcz, a Ty nie miał-aś/-eś parasola. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.
4. Jeśli mieszkasz w Szkocji, gdzie $p = 0,6$, ile potrzebujesz kupić parasoli na starcie aby $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) < 0,1$?

Zadanie 2 (5 pkt). Niech G_n będzie grafem na $3n + 1$ wierzchołkach

$$\{r, a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-1}\}$$

takim, że $G[\{a_0, \dots, a_{n-1}\}]$, $G[\{b_0, \dots, b_{n-1}\}]$, $G[\{c_0, \dots, c_{n-1}\}]$ są klikami i poza krawędziami w tych klikach G_n ma dokładnie trzy krawędzie ra_0 , rb_0 i rc_0 . Jaki jest oczekiwany czas odwiedzenia wszystkich wierzchołków w spacerze losowym po G_n rozpoczynającym w r ? Wystarczy podać asymptotykę względem n .

Zadanie 3 (5 pkt). Pokaż, że w skończonym łańcuchu Markowa:

- (i) co najmniej jeden stan jest rekurencyjny;
- (ii) każdy stan rekurencyjny jest pozytywnie rekurencyjny.

Zadanie 4 (5 pkt). Niech θ_1, θ_2 będą zmiennymi o rozkładzie jednostajnym z $[-\pi, \pi]$ i niech A_1, A_2 będą zmiennymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Wszystkie zmienne są od siebie niezależne. Rozważ następujące dwa punkty w kole o promieniu 1 i środku w $(0, 0)$:

$$\left(\sqrt{A_1} \cos \theta_1, \sqrt{A_1} \sin \theta_1\right), \quad \left(\sqrt{A_2} \cos \theta_2, \sqrt{A_2} \sin \theta_2\right).$$

Niech Z będzie odległością (euklidesową) pomiędzy tymi dwoma punktami. Oblicz $E[Z]$ i $E[Z^2]$.

Zadanie 5 (5 pkt). Z sześciokąta foremnego o boku 1 wybieramy jednostajnie i niezależnie dwa punkty. Jaka jest oczekiwana odległość pomiędzy tymi punktami?

Zadanie 6 (5 pkt). Niech $\{N(t)\}$ będzie procesem Poissona z parametrem 2023.

1. Jeśli $N(2023) = 2023$, to z jakim prawdopodobieństwem $N(2022) = 2022$?
2. Z jakim prawdopodobieństwem nie zajdzie żadne zdarzenie w przedziale czasowym $[2023, 2024]$? Z jakim prawdopodobieństwem nie zajdzie żadne zdarzenie w przedziale czasowym $[2023, 2024]$ jeśli wiemy, że $N(2023) = 2023$?
3. Dla $n > 1$, niech X_n będzie czasem pomiędzy $n - 1$ -szym i n -tym zdarzeniem w procesie i niech X_1 to po prostu czas pierwszego zdarzenia. Oblicz $P(X_1 > X_2)$ i $P(X_1 + X_2 > X_3)$.

Zadanie 7 (5 pkt).

1. Rzucamy monetą o promieniu 1 na pokafelkowaną podłogę. Każda kafelka jest kwadratem o boku 2. Z jakim prawdopodobieństwem moneta nie dotknie żadnej linii łączącej kafelki?
2. Rzucamy igłą o długości 1 na pokafelkowaną podłogę. Każda kafelka jest kwadratem o boku 2. Z jakim prawdopodobieństwem igła nie dotknie żadnej linii łączącej kafelki?

Zadanie 8 (Model Ehrenfesta). [5 pkt] Pojemnik zawierający w sumie n cząstek, jest przedzielony na dwie części błoną półprzepuszczalną. Każda z cząstek, niezależnie od pozostałych, przechodzi do przeciwnej części po czasie będącym zmienną losową z rozkładu wykładniczego z parametrem 1.

- (i) Wyznacz rozkład stacjonarny tego procesu.
- (ii) Który stan w rozkładzie stacjonarnym ma największe prawdopodobieństwo, dlaczego?

Powodzenia.