Kolokwium 2/2 (poprawione)

Zadanie 1. Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Niech $U = XY$ i $V = Z^2$.

(i) (`1 pkt`) Wyznacz dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję U.
(ii) (`1 pkt`) Wyznacz dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję V.
(iii) (`1 pkt`) Oblicz $\mathrm{P}(U < V)$.
(iv) (`1 pkt`) Wyznacz $\mathrm{E}(X \mid U)$.

Zadanie 2 (`4 pkt`)**.** Niech $\{X_n : n \geqslant 1\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Niech $y \in (0, 1)$ i niech

$$N_y = \min\{n \geqslant 1 : X_1 + \cdots + X_n > y\}.$$

Udowdnij, że $\mathrm{P}(N_y > n) = y^n/n!$ dla każdego całkowitego $n \geqslant 1$. Oblicz wartość oczekiwaną N_y. Uwaga, jeśli masz problem z ogólną wersją zadania, udowodnij równość dla $n \in \{1, 2, 3\}$ (warte 1 punkt).

Zadanie 3 (`3 pkt`)**.** Niech U ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$ i niech $q \in (0, 1)$. Czy $\left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$ ma rozkład geometryczny? Jeśli tak to z jakim parametrem.

Zadanie 4. Niech $\lambda, \mu, \nu > 0$ i niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego o parametrach odpowiednio λ, μ, ν. Niech $t > 0$.

(i) (`2 pkt`) Znajdź $\mathrm{P}(X < Y < Z)$.
(ii) (`2 pkt`) Znajdź $\mathrm{P}(X < Y | X > t)$.

Zadanie 5. Rozważ dwa niezależne procesy Poissona $\{N_1(t) \mid t \geqslant 0\}$ i $\{N_2(t) \mid t \geqslant 0\}$ o parametrach 1 i 2, odpowiednio.

(i) (`1 pkt`) Jeśli pierwsze zdarzenie w N_2 ma miejsce w $t = 10$ jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsze zdarzenie w N_1 jest wcześniej?
(ii) (`1 pkt`) Oblicz $\mathrm{P}(N_1(10) - N_1(9) = 8 \mid N_2(10) - N_2(9) = 8)$.
(iii) (`1 pkt`) Jeśli $N_2(10) = 1$ to jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsze zdarzenie w N_1 jest przed pierwszym zdarzeniem w N_2?
(iv) (`1 pkt`) Jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiędzy pierwszymi dwoma zdarzeniami w N_2 jest co najmniej jedno zdarzenie w N_1?
(v) (`1 pkt`) Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugie zdarzenie w N_1 jest wcześniej od trzeciego zdarzenia w N_2?

Zadanie 6 (`4 pkt`)**.** Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi ze standardowym rozkładem normalnym. Która z wartości $\mathrm{P}((X + Y + Z)/3 < 10)$ i $\mathrm{P}(X < 10)$ jest większa. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7. Rozważmy następujący eksperyment. Stojąc na przeciwko bardzo długiej ściany wprawiamy latarkę w ruch obrotowy i obserwujemy losowy punkt na ścianie na którym zatrzyma się światło latarki. Dla ustalenia uwagi, powiedzmy że stoimy w punkcie

$(0,1)$ a ścianą jest oś OX. Jeśli światło nie jest zwrócone na ścianę to możemy powtarzać eksperyment do skutku. Niech X będzie współrzędną punktu na osi OX w który zwrócony jest światło latarki i niech L będzie długością promienia światła latarki (odległość z $(0,1)$ do $(X,0)$).

(i) (`3 pkt`) Podaj dystrubantę, gęstość i wartość oczekiwaną L.

(ii) (`1 pkt`) Załóż, że powtarzasz eksperyment tak długo aż światło wpadnie w przedział $[0,1]$ (czyli $X \in [0,1]$). Jaka teraz jest wartość oczekiwana długości promienia? (czyli policz $E(L \mid X \in [0,1])$)

Zadanie 8 (`4 pkt`)**.** Ustalono pewien parametr $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, którego wartości nie znamy, ale zna go wyrocznia. Aby poznać ten parametr wykonujemy następujący eksperyment. Wybieramy losowo punkt z kwadratu 2×2 i pytamy wyroczni, czy jest on w okręgu o środku w środku kwadratu i promieniu r, czy nie. Powtarzamy ten eksperyment n razy. W jaki sposób przybliżyć wartość r^2 wykonując taki eksperyment? Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego ogranicz z góry liczbę prób (wartość n) potrzebną do tego, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0.95 określić r^2 z dokładnością 0.01.

Można skorzystać z następujących przybliżeń. Jeśli Φ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego to $\Phi(1.7) = 0.95$ i $\Phi(2) - \Phi(-2) = 0.95$. Dodatkowo zauważ, że jeśli $x \in (0,1)$ to $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

Zadanie 9. Niech G będzie skończonym grafem i niech c będzie dodatnią liczbą całkowitą taką, że

$$c \geqslant \Delta(G) + 2.$$

Rozważmy łańcuch Markova, gdzie przestrzeń stanów jest rodziną wszystkich poprawnych kolorowań G na co najwyżej c kolorach. Krok ze stanu M_t do następnego stanu działa następująco. Losujemy jednostajnie i niezależnie: $v \in V(G)$, $\ell \in [c]$. Wtedy $M_{t+1} = \mathrm{recolor}(v, \ell, M_t)$, czyli: jeśli $\ell \notin M_t(N(v))$ to M_{t+1} jest kolorowaniem otrzymanym z M_t przez przekolorowanie wierzchołka v na kolor ℓ; jeśli $\ell \in M_t(N(v))$ to $M_{t+1} = M_t$.

(i) (`2.5 pkt`) Udowodnij, że ten łańcuch jest nieredukowalny, nieokresowy i jego rozkład stacjonarny jest jednostajny.

(ii) (`1.5 pkt`) Zmodyfikuj powyższy łańcuch tak aby następujący rozkład był jego rozkładem stacjonarnym. Dla kolorowania X, $\pi_X = (|\{v \in V(G) : X(v) = 1\}| + 1)/B$, gdzie B to taka wartość, aby π w ogóle było rozkładem. Wykonanie kroku powinno być możliwe do zasymulowania w czasie wielomianowym od wielkości grafu (zakładamy, że umiemy losować jednostajnie z danego zbioru w czasie wielomianowym od jego rozmiaru).

Zadanie 10. Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem takim, że stopień każdego wierzchołka to dokładnie $\frac{2}{3}n$ (można założyć, że $n \geqslant 3$ i n jest podzielne przez 3). Rozważmy klasyczny spacer losowy po G, gdzie w kroku wybieramy jednostajnie jednego ze swoich sąsiadów.

(i) (`1 pkt`) Udowodnij, że istnieje rozkład stacjonarny.

(ii) (`3 pkt`) Ogranicz najlepiej jak umiesz czas mieszania τ_{mix}. Aby otrzymać maksymalną liczbę punktów, należy znaleźć stałą c niezależną od n taką, że $\tau_{\mathrm{mix}} < c$.